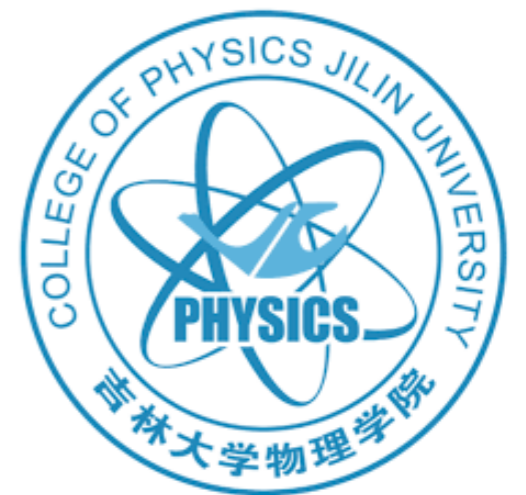


Wilson くりこみ群

-基礎と連続極限

山田雅俊

吉林大学物理学院 理論物理学センター



2024年9月10日@格子上の場の理論 夏の学校2024

内容

- 第一部：くりこみ群の基本
 - Wilsonくりこみ群の基本的アイデア
 - 物理量をどうやって評価するか
- 第二部：くりこみ群と連続極限
 - 連続極限とは
 - 漸近的安全性（自由性）とくりこみ可能性
 - なぜ連続極限が重要なのか

Wilsonくりこみ群の文献 (レビュー)

- 概念的なこと (臨界現象や連続極限など) を理解したい
 - K. G. Wilson, J. B. Kogut, [Phys.Rept. 12 \(1974\) pp. 75-199](#)
 - K. G. Wilson, [Rev.Mod.Phys. 47 \(1975\) 773](#)
 - T. R. Morris, [Prog.Theor.Phys.Suppl.131:395-414,1998](#) ([hep-th/9802039](#))
 - K-I Aoki, [Int.J.Mod.Phys. B14, 1249 \(2000\)](#)
 - H. Sonoda, [arXiv: 0710.1662](#) [hep-th]
 - 江沢洋, et. al, “くりこみ群の方法”, 現代物理学叢書 (岩波書店)
- くりこみ群を使った具体的な応用方法を知りたい
 - C. Bagnuls, C. Bervillier, [Phys. Rept. 348 \(2001\) pp.91-157](#) ([hep-th/0002034](#))
 - J. Berges, Tetradis, C. Wetterich, [Phys. Rept. 363, 223 \(2002\)](#) ([hep-ph/0005122](#))
 - Editors: A. Schwenk, J. Polonyi, [Lect.Notes Phys. 852 \(2012\)](#)
 - C. Bagnuls, C. Bervillier, [Phys. Rept. 348 \(2001\) pp.91-157](#) ([hep-th/0002034](#))
 - N. Dupuis, et. al, [Phys. Rept. \(2021\) 910, pp.1-114](#), ([arXiv:2006.04853](#) [cond-mat.stat-mech])

Wilsonくりこみ群の文献 (レビュー)

- フェルミオン系への応用

- J. Braun, [J.Phys.G 39 \(2012\) 033001](#) (arXiv: 1108.4449 [hep-ph])
- P. Kopietz , L. Bartosch , F. Schütz, [Lect.Notes Phys. 798 \(2010\)](#)
- M. Salmhofer, C. Honerkamp, [Prog.Theor.Phys. 105 \(2001\) 1-35](#)
- W. Metzner, et. al, [Rev.Mod.Phys. 84 \(2012\) 299](#) (arXiv:1105.5289 [cond-mat.str-el])

- ゲージ理論への応用

- H. Gies, [Lect.Notes Phys. 852 \(2012\) pp. 287-348](#) (hep-ph/0611146 [hep-ph])
- Y. Igarashi, K. Itoh, H. Sonoda, [Prog.Theor.Phys.Suppl. 181 \(2010\) 1-166](#) (hep-th/0512261 [hep-th])

- くりこみ群の構造を知りたい

- O. J. Rosten, [Phys. Rept. 511 \(2012\) pp.177-272](#) (arXiv:1003.1366 [hep-th])
- J. M. Pawłowski, [Annals Phys. 322 \(2007\) 2831-2915](#) (hep-th/0512261 [hep-th])

第一部：

くりこみ群の基本

場の量子論で計算したいこと

- 相関関数を得たい。 $\langle \phi(x_1) \rangle$ $\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle$ $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle$
 - 真空エネルギーや粒子の質量などの情報が抜き出せる。

- 相関関数を系統的に得るには：母関数 (generator)

- 経路積分

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]+J\cdot\phi} \quad \langle \mathcal{O}(\phi) \rangle|_{J=0} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(\phi) e^{-S[\phi]}$$

- 格子場モンテカルロ・シミュレーションは経路積分を数値的に評価。

$$\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}(\phi(x_i))$$

ここで簡単な積分を考えてみる

二重積分を考える

$$I = \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)}$$

- $g = 0$ のときは簡単なガウス積分

$$I = \frac{\pi}{4}$$

- $g \neq 0$ のときの厳密解は第二種ベッセル関数で与えられる

$$I = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{2g}} K_0\left(\frac{1}{2g}\right)}{4\sqrt{g}}$$

ここで簡単な積分を考えてみる

摂動論

$$I = \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)}$$

- 摂動論： g が小さいとして展開

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 \frac{(-gx_1^2 x_2^2)^n}{n!} e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

- 2次までだと $I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi g}{16} + \frac{9\pi g^2}{128} + O(g^3)$

ここで簡単な積分を考えてみる

変数一つだけ積分する

$$I = \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 e^{-\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)}} = f_1(x_1, x_2)$$

- x_1 だけを積分してみると

$$I = \int_0^{\infty} dx_2 \frac{\sqrt{\pi} e^{-x_2^2}}{2\sqrt{1 + gx_2^2}} = \int_0^{\infty} dx_2 e^{-\underbrace{\left[x_2^2 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4}{\pi}(1 + gx_2^2)\right)\right]}} = f_2(x_2)$$

x_2 の新しい関数が出てきた

ここで簡単な積分を考えてみる

変数一つだけ積分する

$$I = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 e^{-\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)}} = f_1(x_1, x_2)$$

- x_1 だけを積分してみると

$$I = \int_0^\infty dx_2 \frac{\sqrt{\pi} e^{-x_2^2}}{2\sqrt{1+gx_2^2}} = \int_0^\infty dx_2 e^{-\underbrace{\left[x_2^2 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4}{\pi}(1+gx_2^2)\right)\right]}} = f_2(x_2)$$

x_2 の新しい関数が出てきた

x_2 でテイラー展開

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(2+g)x_2^2}{2} + \frac{g^2 x_2^4}{4} - \frac{g^3 x_2^6}{6} + O(x_2^7)$$

ここで簡単な積分を考えてみる

変数一つだけ積分する

$$I = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 e^{-\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)}} = f_1(x_1, x_2)$$

- x_1 だけを積分してみると

$$I = \int_0^\infty dx_2 \frac{\sqrt{\pi} e^{-x_2^2}}{2\sqrt{1+gx_2^2}} = \int_0^\infty dx_2 e^{-\underbrace{\left[x_2^2 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4}{\pi}(1+gx_2^2)\right)\right]}} = f_2(x_2)$$

x_2 の新しい関数が出てきた

x_2 でテイラー展開

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(2+g)x_2^2}{2} + \frac{g^2 x_2^4}{4} - \frac{g^3 x_2^6}{6} + O(x_2^7)$$

x_1 を積分した情報が x_2 の関数へと
「変換」され、無限次の x_2 の
べき項が生成された
= x_1 の情報が全て含まれてる

ここで簡単な積分を考えてみる

関数をtruncateしてもう一つの変数を積分する

$$I = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)} = \int_0^\infty dx_2 e^{-[x_2^2 + \frac{1}{2} \log(\frac{4}{\pi}(1+gx_2^2))]}$$

$f_1(x_1, x_2)$ $f_2(x_2)$

ここで簡単な積分を考えてみる

関数をtruncateしてもう一つの変数を積分する

$$I = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)} = \int_0^\infty dx_2 e^{-[x_2^2 + \frac{1}{2} \log(\frac{4}{\pi}(1+gx_2^2))]} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{f_1(x_1, x_2)} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{f_2(x_2)}$$

- ここで、 $f_2(x_2)$ を展開し、高次を捨てる近似 (truncation) をする。

$$-f_2(x_2) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(2+g)x_2^2}{2} + \frac{g^2 x_2^4}{4} - \frac{g^3 x_2^6}{6} + O(x_2^7)$$

正当化はひとまず置いておいて。。。

ここで簡単な積分を考えてみる

関数をtruncateしてもう一つの変数を積分する

$$I = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + gx_1^2 x_2^2)} = \int_0^\infty dx_2 e^{-[x_2^2 + \frac{1}{2} \log(\frac{4}{\pi}(1+gx_2^2))]}$$

$f_1(x_1, x_2)$ $f_2(x_2)$

- ここで、 $f_2(x_2)$ を展開し、高次を捨てる近似 (truncation) をする。

$$-f_2(x_2) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(2+g)x_2^2}{2} + \frac{g^2 x_2^4}{4} - \frac{g^3 x_2^6}{6} + O(x_2^7)$$

- そして、 x_2 を積分

正当化はひとまず置いておいて。。。

$$I = \int_0^\infty dx_2 e^{-f_2(x_2)} \simeq \int_0^\infty dx_2 e^{\frac{1}{2} \log(\pi/4) - \frac{2+g}{2} x_2^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{2+g}}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi g}{16} + \frac{3\pi g^2}{128} + O(g^3)$$

これを“くりこみ群”解とここでは呼ぶことにする₄

無限次のgのベキが含まれてる！

ここで簡単な積分を考えてみる

比較してみよう

$$I = \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 e^{-x_1^2 - x_2^2 - gx_1^2 x_2^2}$$

- 厳密解

$$I = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{2g}} K_0\left(\frac{1}{2g}\right)}{4\sqrt{g}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi g}{16} + \frac{9\pi g^2}{128} + O(g^3)$$

- 摂動解

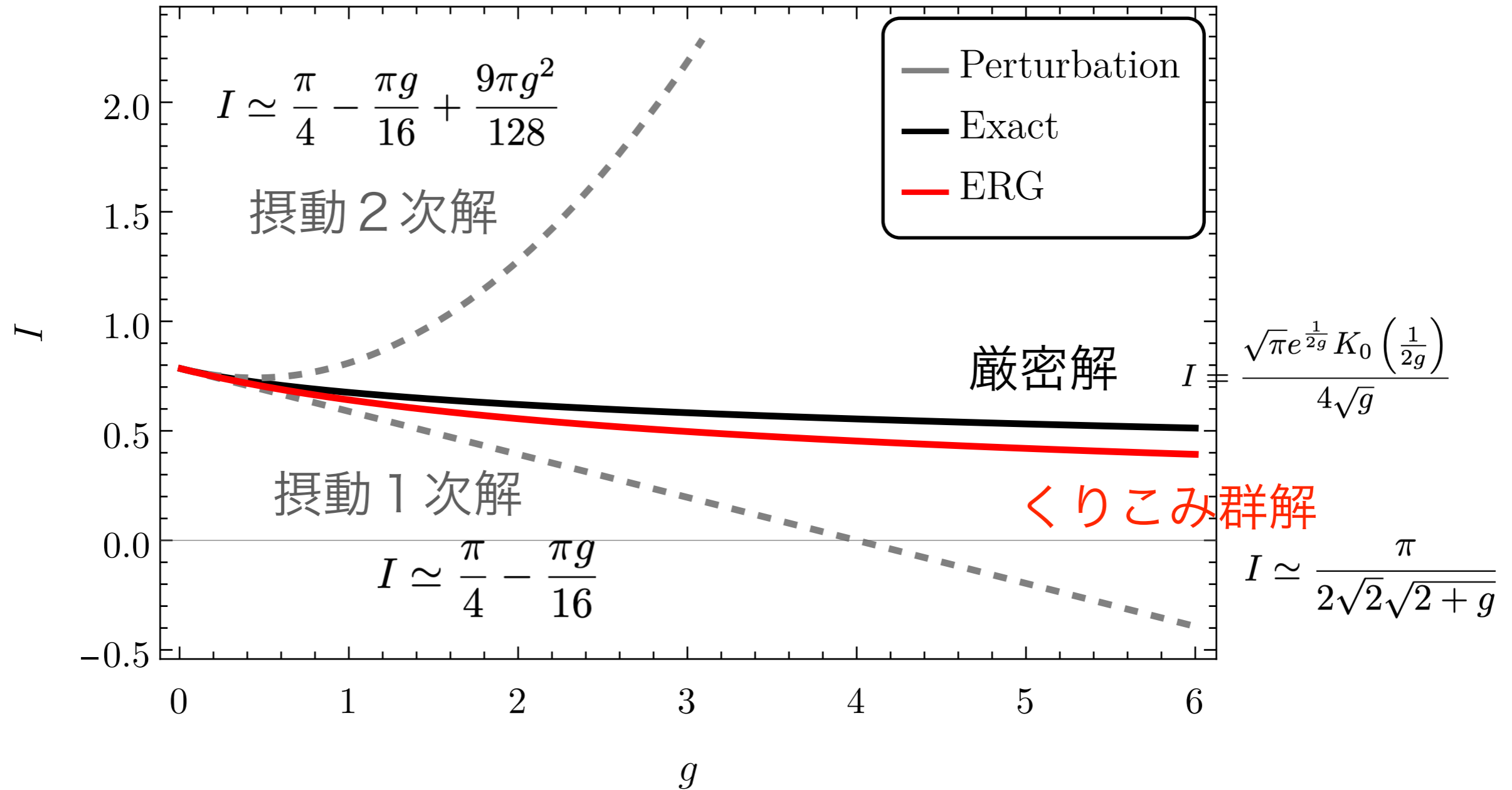
$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi g}{16} + \frac{9\pi g^2}{128} + O(g^3)$$

- “くりこみ群”解

$$I \simeq \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{2+g}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi g}{16} + \frac{3\pi g^2}{128} + O(g^3)$$

ここで簡単な積分を考えてみる

比較してみよう



自由度を増やしていくと

くりこみ群

- 多重積分 $I = \int dx_0 \cdots dx_n e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$
- 変数を順に積分していくと新しい関数が定義されていく。

$$I = \int dx_0 \cdots dx_n e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)} = \int dx_1 \cdots dx_n e^{-f_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots$$

- $f_0(x_0, \dots, x_n)$ を裸の関数、 $f_i(x_i, \dots, x_n)$ を有効関数と呼ぶことにする。
- このプロセスをくりこみ変換と呼ぶ。 $f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow \cdots f_n \rightarrow \cdots$
- この変換は (半) 群を成す：くりこみ群

※粗視化と言ってもいいです。
くりこみ変換のより正確な定義は後ほど

場の量子論＝無限自由度

離散から連続へ

- 離散的ラベルから連続的ラベルへ：多変数から関数へ

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_p \quad 0 < p < \Lambda$$

これを $\phi(p)$ と書いて場と呼ぶ
(運動量とする)

場の量子論＝無限自由度

離散から連続へ

- 離散的ラベルから連続的ラベルへ：多変数から関数へ

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_p \quad \begin{array}{l} \text{これを } \phi(p) \text{ と書いて場と呼ぶ} \\ 0 < p < \Lambda \\ \text{(運動量とする)} \end{array}$$

- 多変数の関数から関数の関数へ：汎関数 (functional)

$$f_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f_0(x_p) \quad \begin{array}{l} \text{これを } S_\Lambda[\phi(p)] \text{ と書いて裸の作用と} \\ \text{呼ぶ} \end{array}$$

場の量子論 = 無限自由度

離散から連続へ

- 離散的ラベルから連続的ラベルへ：多変数から関数へ

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_p \quad \begin{array}{l} \text{これを } \phi(p) \text{ と書いて場と呼ぶ} \\ 0 < p < \Lambda \\ \text{(運動量とする)} \end{array}$$

- 多変数の関数から関数の関数へ：汎関数 (functional)

$$f_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f_0(x_p) \quad \begin{array}{l} \text{これを } S_\Lambda[\phi(p)] \text{ と書いて裸の作用と} \\ \text{呼ぶ} \end{array}$$

- 離散的くりこみ変換から連続的くりこみ変換へ

$$f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_n \rightarrow \dots \longrightarrow S_\Lambda[\phi(p)] \rightarrow S_{\Lambda-\delta\Lambda}[\phi(p)] \rightarrow \dots \rightarrow S_k[\phi(p)] \rightarrow \dots$$

数列 Wilson有効作用 微小変形

比較表：離散 vs. 連続

- 評価したい積分

$$I = \int \prod_{i=0}^n dx_i e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int \prod_{p=0}^{\Lambda} dx_p e^{-f_0[x_p]}$$

比較表：離散 vs. 連続

- 評価したい積分

$$I = \int \prod_{i=0}^n dx_i e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int_0^\Lambda \mathcal{D}\phi(p) e^{-S_\Lambda[\phi(p)]}$$

比較表：離散 vs. 連続

- 評価したい積分

$$I = \int \prod_{i=0}^n dx_i e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int_0^\Lambda \mathcal{D}\phi(p) e^{-S_\Lambda[\phi(p)]}$$

- くりこみ変換

$$I = \int dx_0 \cdots dx_n e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

⋮

$$= \int dx_i \cdots dx_n e^{-f_i(x_i, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) \int_k^\Lambda \mathcal{D}\phi_{>}(p) e^{-S_\Lambda[\phi_{<} + \phi_{>}]}$$

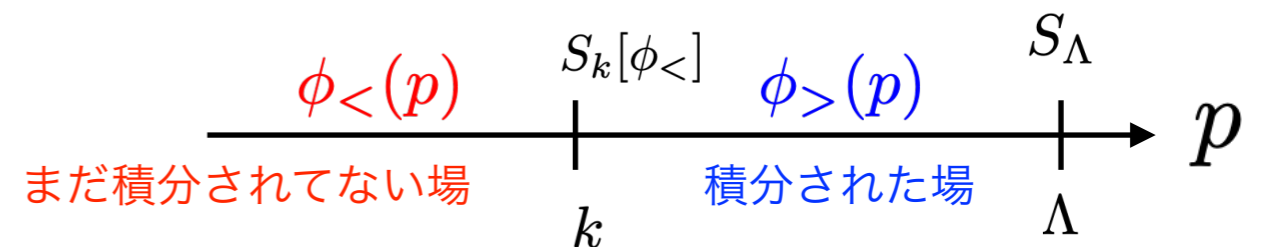
$$= \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) e^{-S_k[\phi_{<}]}$$

Wilson有効作用

$(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$

積分された変数

まだ積分されていない変数



比較表：離散 vs. 連続

- 評価したい積分

$$I = \int \prod_{i=0}^n dx_i e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int_0^\Lambda \mathcal{D}\phi(p) e^{-S_\Lambda[\phi(p)]}$$

- くりこみ変換

$$I = \int dx_0 \cdots dx_n e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)}$$

⋮

$$= \int dx_i \cdots dx_n e^{-f_i(x_i, \dots, x_n)}$$

$$Z = \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) \int_k^\Lambda \mathcal{D}\phi_{>}(p) e^{-S_\Lambda[\phi_{<} + \phi_{>}]}$$

$$= \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) e^{-S_k[\phi_{<}]}$$

Wilson有効作用

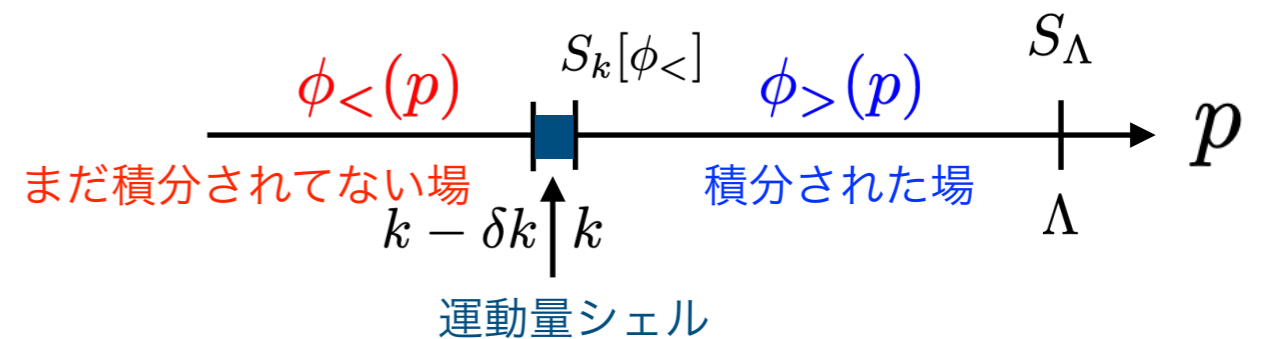
$$(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$$

積分された変数

まだ積分されていない変数

- くりこみ群方程式

$$f_{n+1} = F[f_n]$$



$$k \partial_k S_k = F[S_k]$$

汎関数積分を汎関数微分方程式へ 経路積分からくりこみ群方程式

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int J \cdot \phi} \quad \longrightarrow \quad k \partial_k S_k = F[S_k]$$

汎関数積分 汎関数微分方程式

- 微分方程式の形式で、摂動（弱結合展開）によらない近似ができれば嬉しい。結合定数の全領域をカバーしたい。
- 場を $\phi = \phi_{<} + \phi_{>}$ と分けて、 $\phi_{>}$ を積分して出てきた $S_k[\phi_{<}]$ は無限次の $\phi_{<}$ が含んでいるので、それを truncate して近似。
- 摂動論の結果や平均場近似の結果も再現でき、比較もできる。
- Truncation の次数を上げていけばより精度よくなる（はず）。

くりこみ群方程式

どの側面を強調したいかによる呼び方

- いろんな呼び方
 - **汎関数**くりこみ群 (fRG) : 汎関数に対する定式化だから
 - **Wilson**くりこみ群 (Wilson RG) : Wilsonが提唱したから
 - **非摂動**くりこみ群 (NPRG) : 摂動に依らない定式化だから
 - **厳密**くりこみ群 (ERG) : 近似をせずに定式化できるから
- 単にRGフロー方程式 (RG flow equation) と呼ぶこともある

汎関数には種類がある

統計力学とのアナロジー

- 経路積分

$$Z[J(p)] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi(p)] + \int J \cdot \phi}$$

- シュウィンガー汎関数

$$W[J(p)] = \log Z[J(p)]$$

- 1PI有効作用

$$\Gamma[\Phi(p)] = -W[J(p)] + J(p) \cdot \Phi(p)$$

- 分配関数

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

- ヘルムホルツ自由エネルギー

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z$$

- ギブス自由エネルギー

$$G = F + pV$$

くりこみ群方程式の定式化

色々ある

- それぞれの母関数に対してくりこみ群方程式を定式化できる。

$$S_k[\phi] \quad Z_k[J] \quad W_k[J] \quad \Gamma_k[\Phi]$$

- 代表的なものは

- Wilson-Polchinski方程式 ($S_k[\phi]$ に対して)

$$k\partial_k S_k = \frac{1}{2} \frac{\delta S_k}{\delta \phi_{<}} \cdot \frac{k\partial_k R_k}{(p^2 + R_k)^2} \cdot \frac{\delta S_k}{\delta \phi_{<}} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{k\partial_k R_k}{(p^2 + R_k)^2} \cdot \frac{\delta^2 S_k}{\delta \phi_{<} \delta \phi_{<}} \right]$$

- Wetterich方程式/発展方程式 ($\Gamma_k[\Phi]$ に対して)

$$k\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[k\partial_k R_k \cdot \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_k \right)^{-1} \right]$$

カットオフ・スキーム

どのように運動量を切るか

- 離散変数の場合とは違い、連続変数 p を k で切る方法は色々ある。

- シャープカットオフ

$$\phi(p) = \underbrace{\phi(p)\theta(k-p)}_{\phi_{<}(p)} + \underbrace{\phi(p)\theta(p-k)}_{\phi_{>}(p)}$$

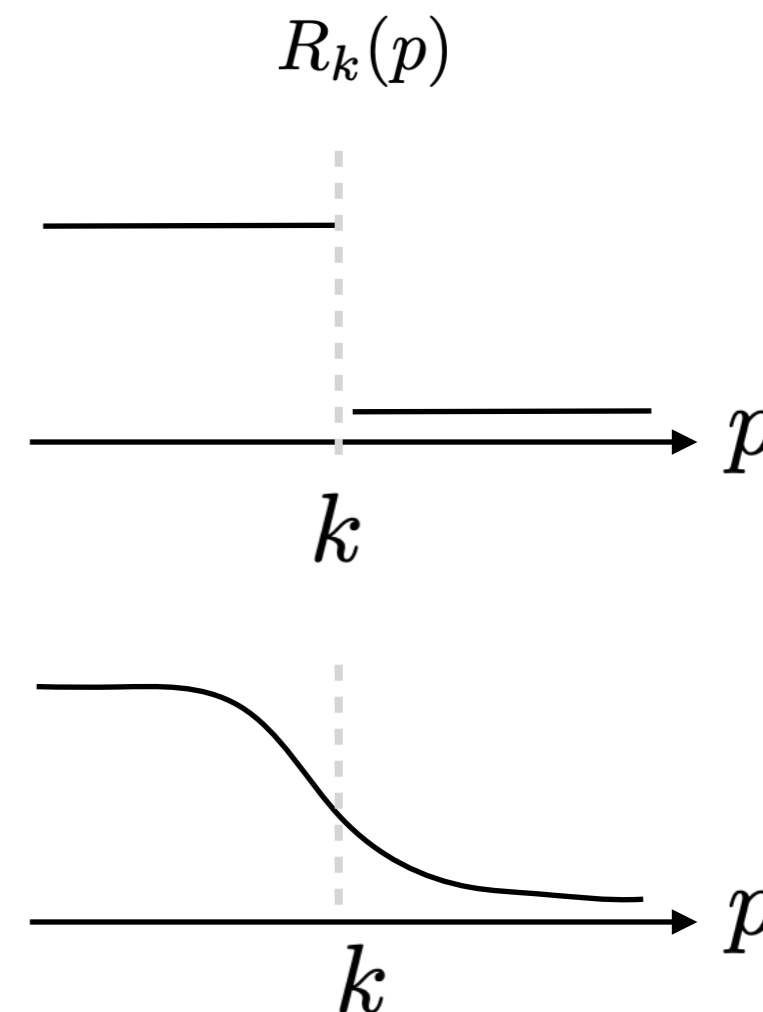
- スムースカットオフ

- これも色々ある

- これらをコントロールするのが $R_k(p)$ 。

- 例えば、 $R_k(p) = (k^2 - p^2)\theta(p - k)$

- この選択をスキームの選択という。



くりこみ変換を繰り返す

結合定数が変化していく = 結合定数のフロー

- 初期作用 $S_\Lambda = \int [g_1^\Lambda \phi(p)^2 + g_2^\Lambda \phi(p)^4]$



$\phi_>(p)$ を積分 $k\partial_k S_k = F[S_k]$

- 有効作用 $S_k = \int [g_1^k \phi_<(p)^2 + g_2^k \phi_<(p)^4 + \cdots g_i^k \phi_<(p)^i + \cdots]$

- 結合定数 $\{g_i^k\}$ の空間：理論空間 (Theory space)

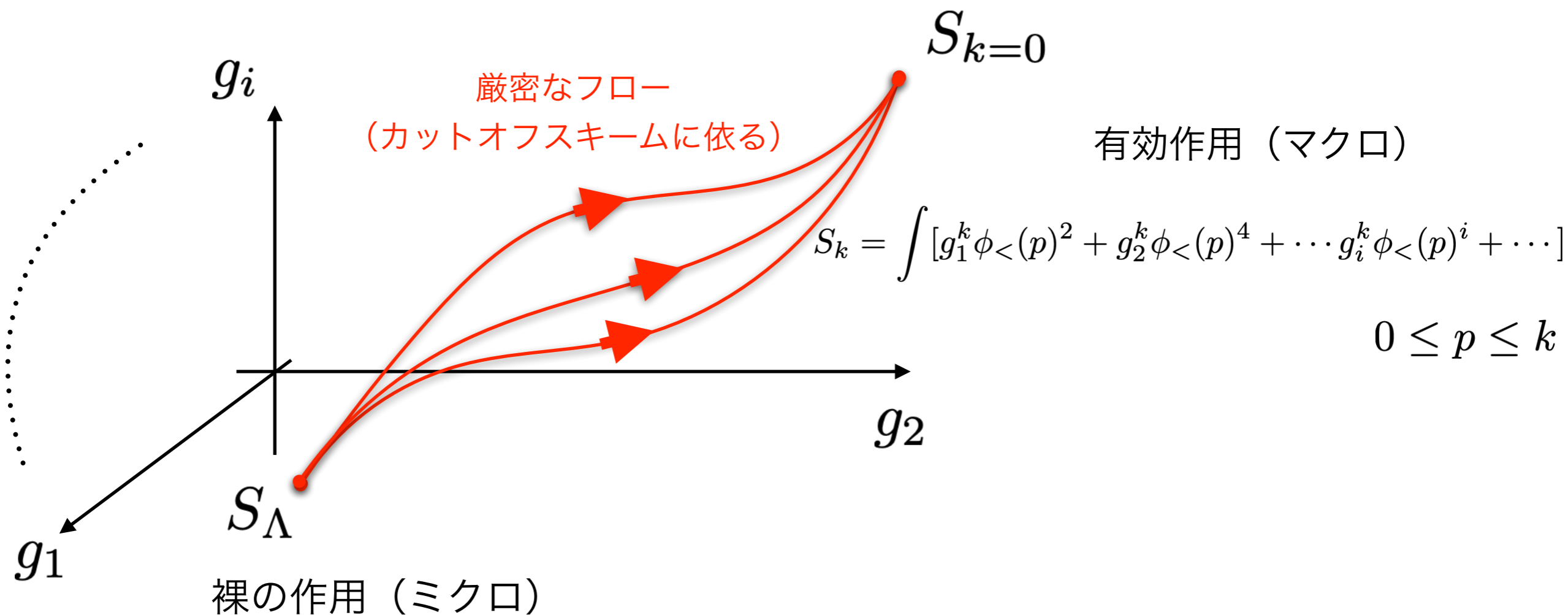
- くりこみ群方程式は、結合定数 $\{g_i^k\}$ の変化を記述する。

- 理論空間内の $\{g_i^k\}$ の流れ (flow) / 軌跡 (trajectory) を追う。

くりこみ変換の流れ

理論空間 (Theory space) くりこみ群フロー (RG flow)

連続くりこみ変換でパラメータが変化していく：走る結合定数
Running coupling

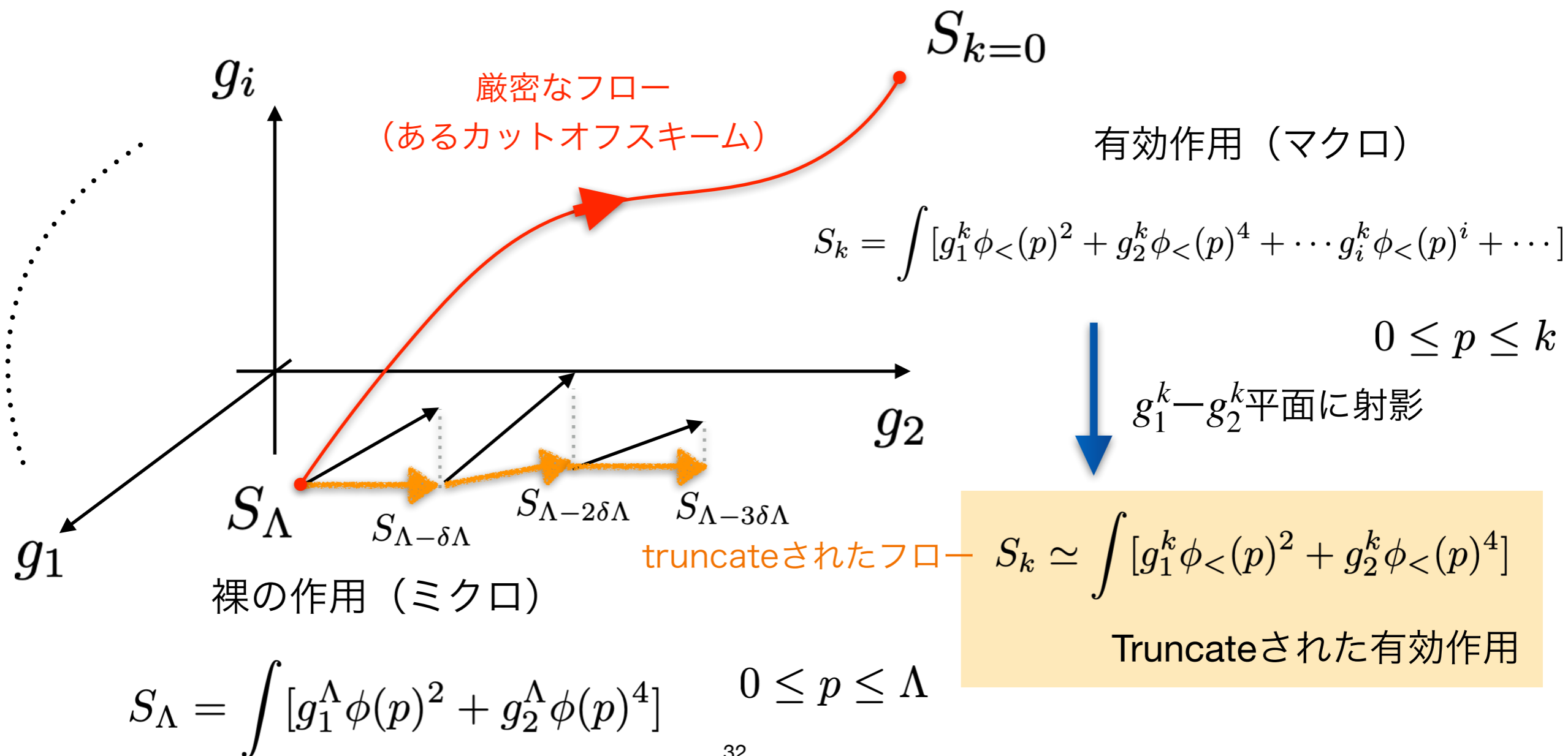


$$S_\Lambda = \int [g_1^\Lambda \phi(p)^2 + g_2^\Lambda \phi(p)^4] \quad 0 \leq p \leq \Lambda$$

くりこみ変換の流れ

理論空間 (Theory space) くりこみ群フロー (RG flow)

連続くりこみ変換でパラメータが変化していく：走る結合定数
Running coupling



近似法

有効作用をどうやって書き下すか

- 微分（運動量）展開（Derivative (momentum) expansion）

$$S_k = \int d^d x \left[V_k(\phi_{<}) + \frac{Z_k(\phi_{<})}{2} (\partial_\mu \phi_{<})^2 + \frac{Y_k(\phi_{<})}{4} (\partial^2 \phi_{<})^2 + \dots \right]$$

- 頂点展開（(Irreducible) vertex expansion）

$$S_k = S_k^{(0)} + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} S_k^{(1)}(p) \phi_{<}(p) + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} S_k^{(2)}(p, -p) \phi_{<}(p) \phi_{<}(-p) \\ + \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} S_k^{(3)}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \phi_{<}(p_1) \phi_{<}(p_2) \phi_{<}(-p_1 - p_2) + \dots$$

ここまでのまとめ：くりこみ群

- 変数を積分すると、残りの変数に対して新しい関数が生成されていく。

$$I = \int dx_0 \cdots dx_n e^{-f_0(x_0, \dots, x_n)} = \int dx_1 \cdots dx_n e^{-f_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots$$

- 場の量子論では、高エネルギー-運動量 ($k \leq p \leq \Lambda$) を持つ場 $\phi_{>}(p)$ を積分すると、低エネルギー-運動量 ($0 \leq p \leq k$) を持つ場 $\phi_{<}(p)$ の有効作用が定義されていく。

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) \int_k^\Lambda \mathcal{D}\phi_{>}(p) e^{-S_\Lambda[\phi_{<} + \phi_{>}]} \\ &= \int_0^k \mathcal{D}\phi_{<}(p) e^{-\underline{S_k[\phi_{<}]}} \end{aligned}$$

$\phi_{<}$ の無限べきが含まれている
これを近似 (truncation) する

ここまでのまとめ：くりこみ群

- 利点

- 摂動論に依らない近似ができる。
- 近似のレベルを系統的に上げていけば、より正確な結果が得られる。
- 近似によっては摂動論の結果も再現できる。

- 欠点

- 物理量の計算において、誤差の制御をどうするか。
- 近似のレベルを上げると計算コストが上がっていく。
- ゲージ理論を扱う際のカットオフによるゲージ対称性のあらわな破れ。

内容

- くりこみ群とは
 - 簡単な積分の例
 - 経路積分へ
- 汎関数くりこみ群の応用 1 : 量子力学

1次元スカラー場の量子論

つまり量子力学

K. Aoki et al, *Prog.Theor.Phys.* 108 (2002) 3, 571-590

- $\phi(t) = x(t)$ なので量子力学。フーリエ変換すると $x(E)$ 。
- 例：非調和振動子 (@ $\Lambda = \infty$)

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} (\partial_t x)^2 + \rho_\Lambda + \frac{1}{2} x^2 + \lambda x^4 \right] \quad m^2 = 1$$

- 厳密解はわからない（数値的には得られる）。
- 摂動論によると基底状態のエネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \lambda - \frac{21}{8} \lambda^2 + \dots \quad \hbar = 1$$

汎関数くりこみ群で評価

近似的な有効作用を与える。

- truncateした有効作用

$$S_k \simeq \int dt \left[\frac{1}{2} (\partial_t x_{<})^2 + V_k(x_{<}) \right]$$

- $k \leq E \leq \Lambda$ のエネルギーを積分して定義された有効作用。
- 運動項も補正されるはずだし、高階微分項 $((\partial_t^2 x)^2)$ などもあるはずだけど捨てた。

局所ポテンシャル近似 (Local Potential Approximation; LPA)

- $V_k(x)$ に対する偏微分方程式になる。

$$k \partial_k V_k = - \frac{k}{\pi} \frac{V_k''}{k^2 + V_k''}$$

$$R_k(p) = (k^2 - p^2) \theta(p^2 - k^2)$$

$$V_k'' = \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_{<}^2}$$

汎関数くりこみ群で評価

ポテンシャルを原点周りで展開すると

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{1}{2} m_k^2 x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4 + \kappa_k x_{<}^6 + \dots$$

- 各パラメータに対する無限連立常微分方程式になる。

$$k \partial_k \rho_k = -\frac{k}{\pi} \frac{m_k^2}{k^2 + m_k^2} \longrightarrow$$

$$E_0 = \rho_{k=0} - \rho_\Lambda$$

$$k \partial_k m_k^2 = -\frac{24k^3}{\pi} \frac{\lambda_k}{(k^2 + m_k^2)^2}$$

これらを初期値@ Λ

$$\rho_{k=\Lambda} = \rho_\Lambda$$

$$m_{k=\Lambda}^2 = 1$$

$$\lambda_{k=\Lambda} = \lambda \quad \text{他はゼロ}$$

$$k \partial_k \lambda_k = \frac{6k^3}{\pi} \left[\frac{24\lambda_k^2}{(k^2 + m_k^2)^3} - \frac{5\kappa_k}{(k^2 + m_k^2)^2} \right]$$

で $k=0$ まで解く。

$$k \partial_k \kappa_k = \dots$$

⋮

汎関数くりこみ群で評価

ポテンシャルを原点周りで展開すると

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{1}{2} m_k^2 x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4 + \kappa_k x_{<}^6 + \dots$$

- 各パラメータに対する無限連立常微分方程式になる。

$$k \partial_k \rho_k = -\frac{k}{\pi} \frac{m_k^2}{k^2 + m_k^2}$$

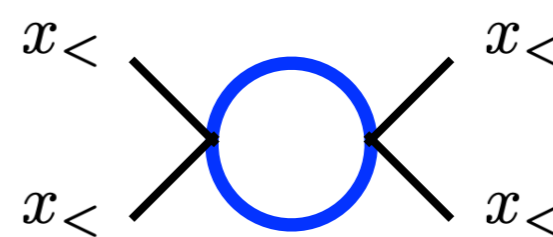
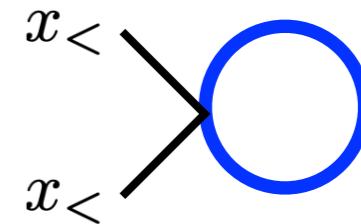
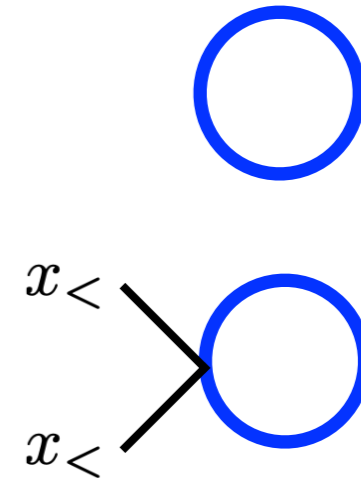
連立方程式系は閉じてない

$$k \partial_k m_k^2 = -\frac{24k^3}{\pi} \frac{\lambda_k}{(k^2 + m_k^2)^2}$$

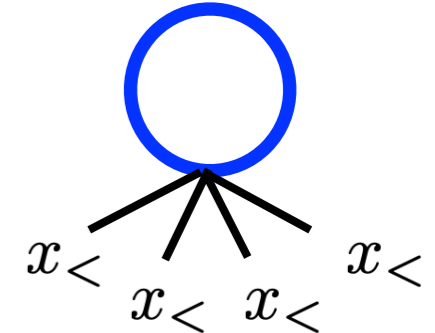
$$k \partial_k \lambda_k = \frac{6k^3}{\pi} \left[\frac{24\lambda_k^2}{(k^2 + m_k^2)^3} - \frac{5\kappa_k}{(k^2 + m_k^2)^2} \right]$$

$$k \partial_k \kappa_k = \dots$$

⋮



+



⋮

汎関数くりこみ群で評価

ポテンシャルを原点周りで展開すると

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{1}{2} m_k^2 x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4 + \kappa_k x_{<}^6 + \dots$$

- 各パラメータに対する無限連立常微分方程式になる。

$$k \partial_k \rho_k = -\frac{k}{\pi} \frac{m_k^2}{k^2 + m_k^2}$$

Truncateして閉じた連立方程式

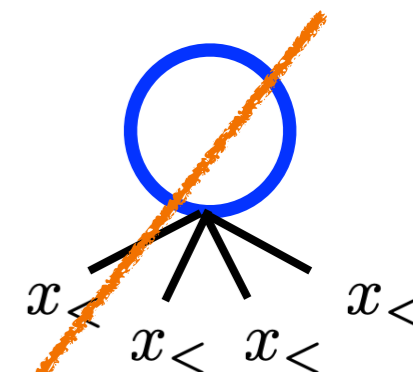
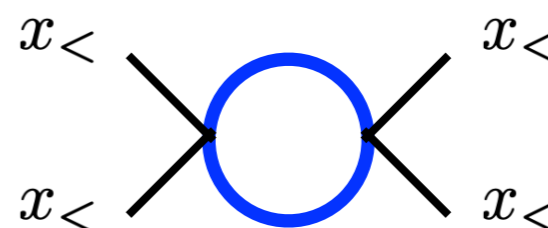
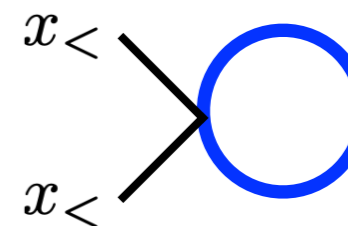
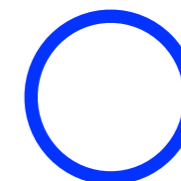
$$k \partial_k m_k^2 = -\frac{24k^3}{\pi} \frac{\lambda_k}{(k^2 + m_k^2)^2}$$

$$k \partial_k \lambda_k = \frac{6k^3}{\pi} \left[\frac{24\lambda_k^2}{(k^2 + m_k^2)^3} - \frac{5\kappa_k}{(k^2 + m_k^2)^2} \right]$$

$$k \partial_k \kappa_k = \dots$$

⋮

Truncation



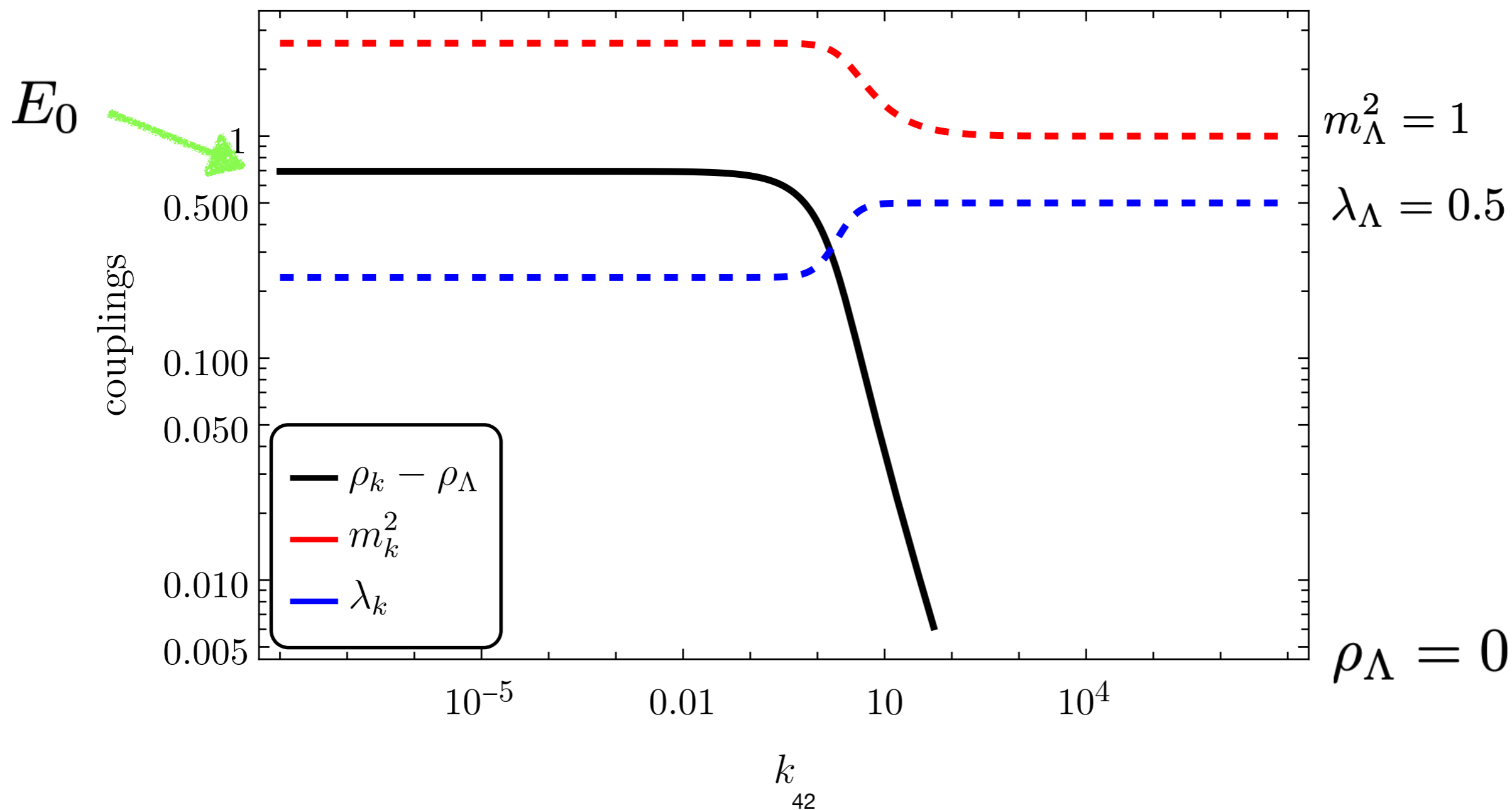
⋮

くりこみ群フロー

一例

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{1}{2} m_k^2 x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4 + \kappa_k x_{<}^6 + \dots$$

Truncation



基底エネルギー

比較してみよう：厳密 vs. 摂動論 vs. くりこみ群

- 厳密解：知らない。シュレディンガー方程式を数値的に解く。

- 摂動解
$$E_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda - \frac{21}{8}\lambda^2 + \dots$$

- くりこみ群解

$$=-2.625$$

- (偏) 微分方程式の解 (数値的に解く)

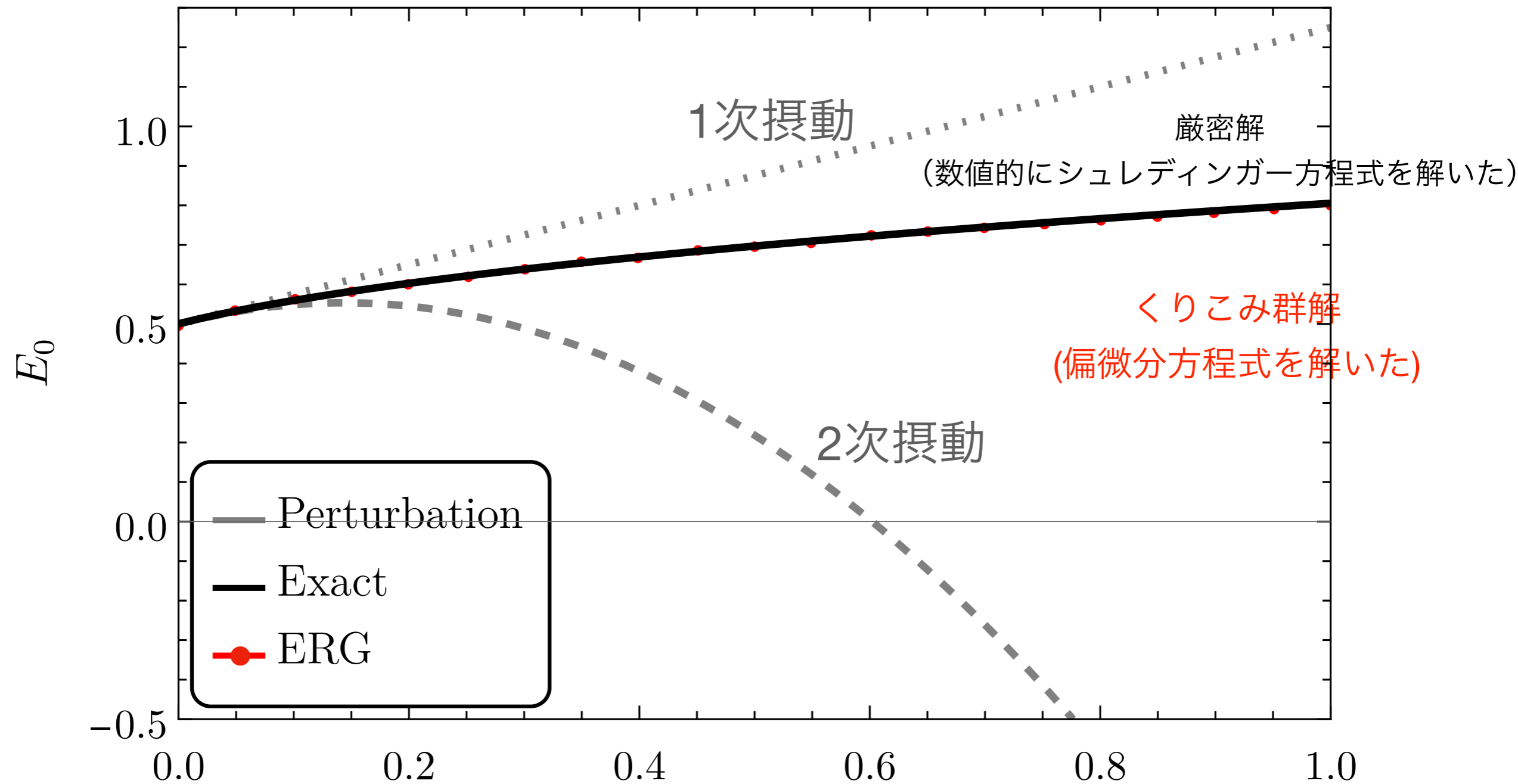
- λ の展開 (弱結合摂動展開) で表すこともできる：

$$E_0 \simeq \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda - \left(\frac{3}{2} + \frac{87}{16\pi^2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{45}{8} + \frac{6848}{25\pi^4} + \frac{711}{32\pi^2}\right)\lambda^3 - \left(27 + \frac{129702723}{44800\pi^4} + \frac{1125}{8\pi^2}\right)\lambda^4 + O(\lambda^5)$$

$=-2.05093$

基底エネルギー

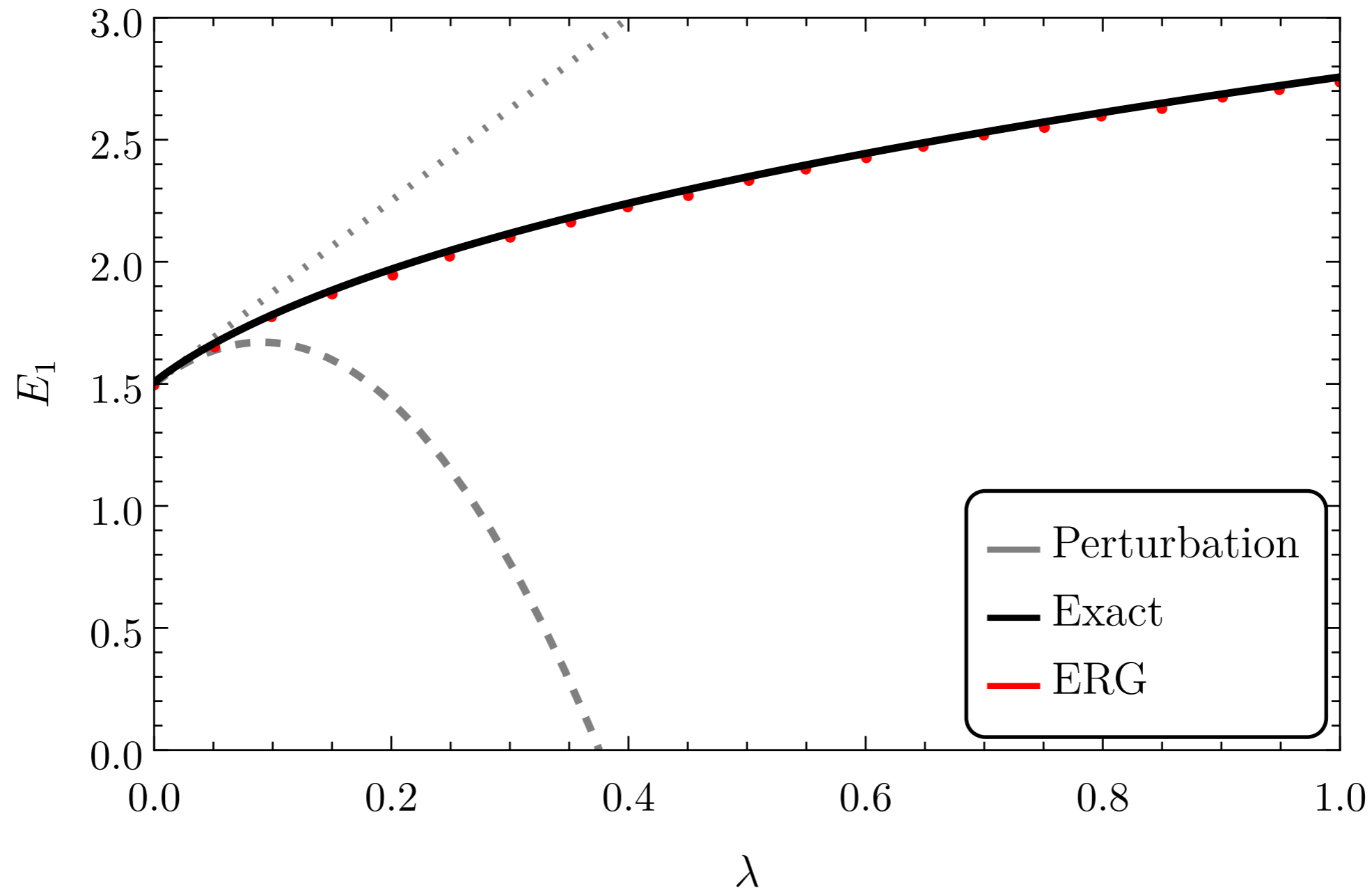
比較してみよう：厳密 vs. 摂動論 vs. くりこみ群



励起状態のエネルギー

第一励起状態もよく合ってる。

$$E_1 - E_0 = \sqrt{\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=0}}$$



Truncationレベルを上げていく

結果はより良くなっていく

黒：厳密解

青

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{m_k^2}{2} x_{<}^2 + \lambda x_{<}^4$$

λを定数とする

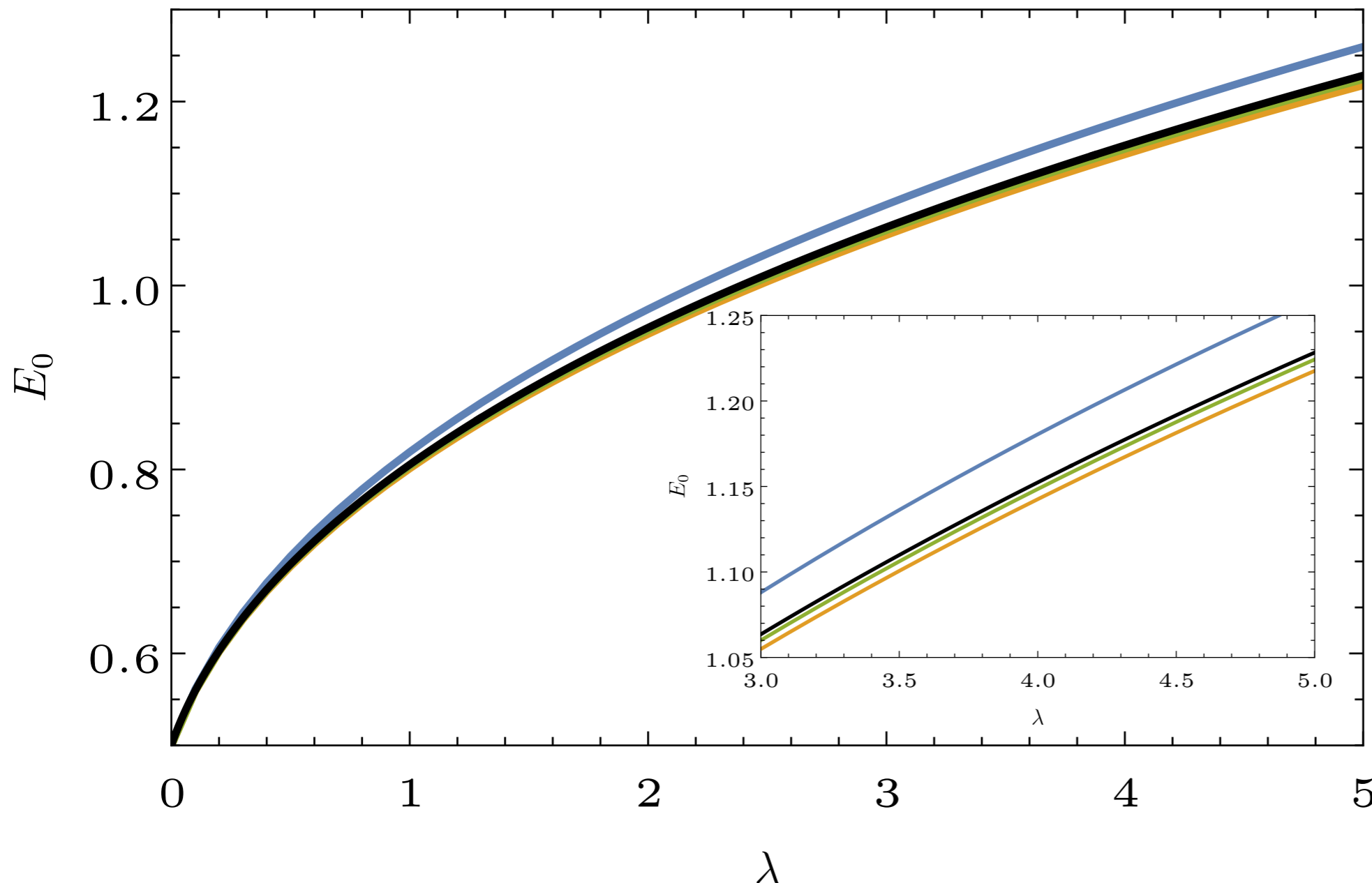
オレンジ

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{m_k^2}{2} x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4$$

λがくりこみ群で変化

緑

$$V_k(x_{<}) = \rho_k + \frac{m_k^2}{2} x_{<}^2 + \lambda_k x_{<}^4 + \kappa_k x_{<}^6$$



第二部：

くりこみ群と連続極限

連続極限とは

- 格子場の理論の場合、格子間隔を $a \rightarrow 0$ とすること
- 連続場の理論の場合、カットオフを $\Lambda \rightarrow \infty$ とすること
- 紫外カットオフと格子間隔

$$\Lambda \sim \frac{1}{a}$$

- 格子場の理論から連続場の理論を数学的に定義：**構成的場の理論**

参考文献：

1. 江沢洋, et. al, “くりこみ群の方法”, 現代物理学叢書 (岩波書店)
2. 田崎晴明, 原 隆, “相転移と臨界現象の数理”, 共立叢書 現代数学の潮流 (共立出版)

Wilsonくりこみ群と連続極限

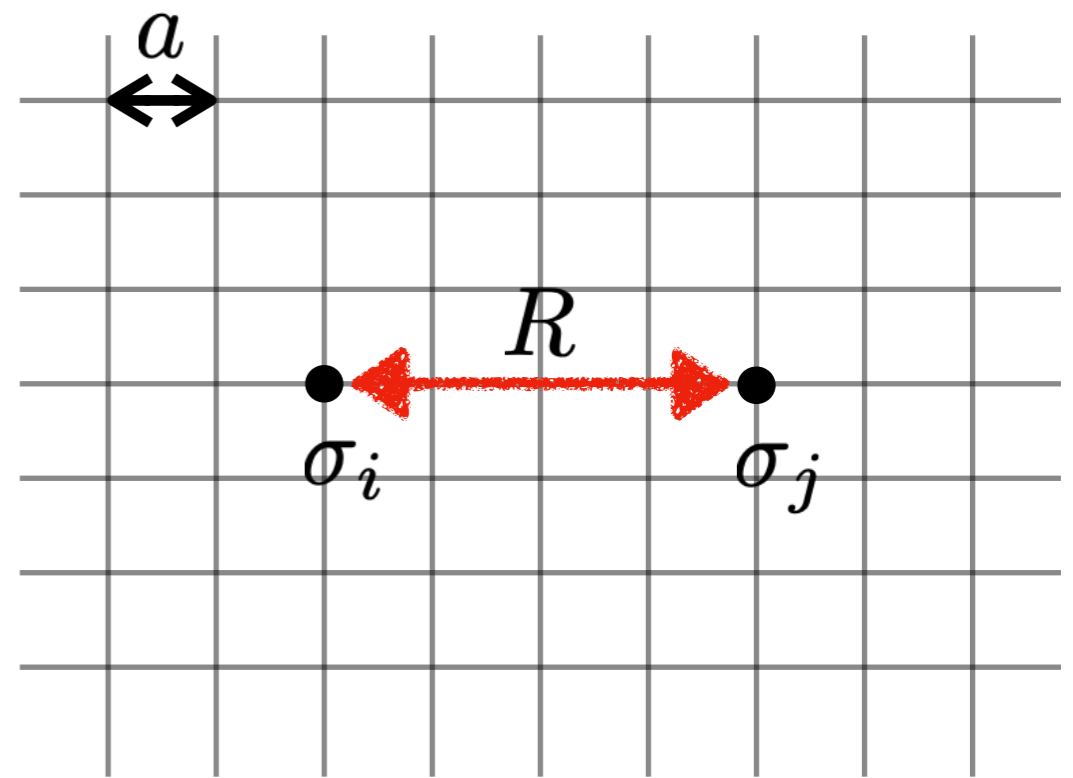
このPartで知って欲しいこと

- 連続極限で**非自明な理論を与えたい**。
 - 相互作用のある $S_{\Lambda=\infty}$ が存在するか？
 - 固定点（不動点；Fixed point）の存在：くりこみ可能性
- 臨界現象
 - 2次相転移：相関長が発散
 - 相境界＝臨界面

連続極限の場の量子論＝臨界状態の統計力学系

相関とは？

磁性体の例



- イジング模型 ($d \geq 2$)

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

多くの文献では $a = 1$ としている

- 相転移を示す： $T < T_c$ で自発磁化が発生： $\mathcal{M} = \langle \sigma_i \rangle \begin{cases} > 0 & (T < T_c) \\ = 0 & (T > T_c) \end{cases}$

- 2点相関関数 @ $T \sim T_c$ (十分大きい $\tilde{R} = R/a$ で経験的に)

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum \sigma_i \sigma_j e^{-\frac{H}{k_B T}}$$

$$\sim \exp\left(-\frac{\tilde{R}}{\tilde{\xi}(T)}\right)$$

$\tilde{\xi}(T)$: 相関長 (correlation length)

スピン同士が相関している格子間隔あたりの距離

$$\tilde{\xi}(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}$$

← 臨界指数 ($\nu > 0$)

$$Z = \sum e^{-\frac{H}{k_B T}}$$

臨界状態と連続極限

相関長の発散

- 連続極限を取りたい： $a \rightarrow 0$ 物性系だと a は固定されてるけれど。
- 2次相転移点（臨界点）： $\tilde{\xi} = \frac{\xi_{\text{phy}}}{a} \rightarrow \infty$ ξ_{phy} : 系固有の相関長
- 物理的相関長を有限な値に固定して、 $a \rightarrow 0$ とするには？

$$\xi_{\text{phy}} = \tilde{\xi} a = \text{fixed}$$

- 臨界点近傍で $\tilde{\xi}(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}$ と振る舞うと知っている。
- 系を臨界に近づけながら $(T \rightarrow T_c)$ 、 $a \rightarrow 0$ とすると ξ_{phy} を一定にできる。
- 臨界指数 $\nu (> 0)$ は、どのように T と a を応答させればいいのかを教えてくれる。

$$\text{const.} = \tilde{\xi}(T) a = \frac{a}{(T - T_c)^\nu} \longrightarrow T = T_c + \# a^{1/\nu}$$

連続極限の定義

場の量子論では、質量が相関長（の逆数）

- 2点相関関数 $\langle \Omega | \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \sim e^{-m_{\text{phy}} |x|}$ for $|x| \rightarrow \infty$

- 2次相転移点（臨界点）：カットオフ Λ 比での質量がゼロ

$$m_{\text{phy}} = \frac{1}{\xi_{\text{phy}}}$$

$$\tilde{m}_{\Lambda} = \frac{m_{\text{phy}}}{\Lambda} \rightarrow 0$$

- 有限な物理的質量 m_{phy} を固定して $\Lambda \rightarrow \infty$ を取りたい。

$$m_{\text{phy}} = \tilde{m}_{\Lambda} \Lambda = \text{fixed}$$

- “臨界” $\tilde{m}_{\Lambda} \rightarrow 0$ に近づけながら、 $\Lambda \rightarrow \infty$ とすればよい。

- Λ の変化に対して \tilde{m}_{Λ} をどのように応答させればよいか？：くりこみ群！ $\tilde{m}_{\Lambda}^2 = \tilde{m}_*^2 + \# \Lambda^{-\theta}$

相互作用を含めると結合定数を動かして

$$S_{\Lambda} \rightarrow S_{\Lambda}^c \text{ for } \Lambda \rightarrow \infty$$

温度を調節して

$$\frac{H}{k_B T} \rightarrow \frac{H}{k_B T_c} \text{ for } a \rightarrow 0$$

$$S_{\Lambda} = S_{\Lambda}^c + \# \Lambda^{-\theta}$$

$$T = T_c + \# a^{1/\nu}$$

くりこみ変換での作用の変化

エネルギーの尺度をそろえる。

- 裸の作用 S_Λ はエネルギー Λ で定義されている。
- 有効作用 S_k はエネルギー k で定義されている。
- エネルギーの尺度を揃えないと、くりこみ変換（粗視化）でどのくらい変化したか比べられない。
- なので、**無次元量**を定義して比べる。
 - 例：スカラー場の質量項

$$\frac{m_\Lambda^2}{\Lambda^2} \quad \rightarrow \quad \frac{m_k^2}{k^2}$$

くりこみ変換での作用の変化

場のくりこみ：Redundant演算子を固定

- くりこみ変換（粗視化）で全ての結合定数が変化していく。

$$S_\Lambda = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{4} \phi^4 \right] \quad \longrightarrow \quad S_k = \int d^4x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m_k^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_k}{4} \phi^4 + \frac{\kappa_k}{6} \phi^6 + \dots \right]$$

- 全ての演算子のうちの一つを係数を固定しないと、くりこみ変換（粗視化）でどれくらい変化したか比べられない。

- Redundant演算子を選ぶ：典型的には運動項を固定

- 場のくりこみ（Renormalization of field）を行う

$$S_k = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 + \frac{m_k^2}{2Z_k} \phi_R^2 + \frac{\lambda_k}{4Z_k^2} \phi_R^4 + \frac{\kappa_k}{6Z_k^3} \phi_R^6 + \dots \right]$$

くりこみ変換

より正確な定義

- くりこみ変換

- 粗視化 (Coarse graining)** : 高エネルギー運動量 ($k \leq p \leq \Lambda$) を積分して有効作用を与える。

- 再スケールリング (rescaling)** : 無次元化と場のくりこみ

$$S_\Lambda = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\tilde{m}_\Lambda^2}{2\Lambda^2} \phi^2 + \frac{\tilde{\lambda}_\Lambda}{4\Lambda^0} \phi^4 \right]$$



$$S_k = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 + \frac{\tilde{m}_k^2}{2k^2 Z_k} \phi_R^2 + \frac{\tilde{\lambda}_k}{4k^0 Z_k^2} \phi_R^4 + \frac{\tilde{\kappa}_k}{6k^{-2} Z_k^3} \phi_R^6 + \dots \right]$$

無次元量のくりこみ群方程式

正準スケーリング (Canonical Scaling)

- 無次元結合定数

$$\tilde{m}_k^2 = \frac{m_k^2}{Z_k k^2} \quad \tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{Z_k^2} \quad \tilde{\kappa}_k = \frac{\kappa_k k^2}{Z_k^4} \quad \dots$$

- くりこみ群方程式：主に3つの項から成る。

- 例えば質量項

正準スケーリング項

$$k \partial_k \tilde{m}_k^2 = - (2 - \eta_k) \tilde{m}_k^2 + \beta \tilde{m}_k^2$$

質量項が質量次元2
でスケールする

場のくりこみで生成した
異常次元

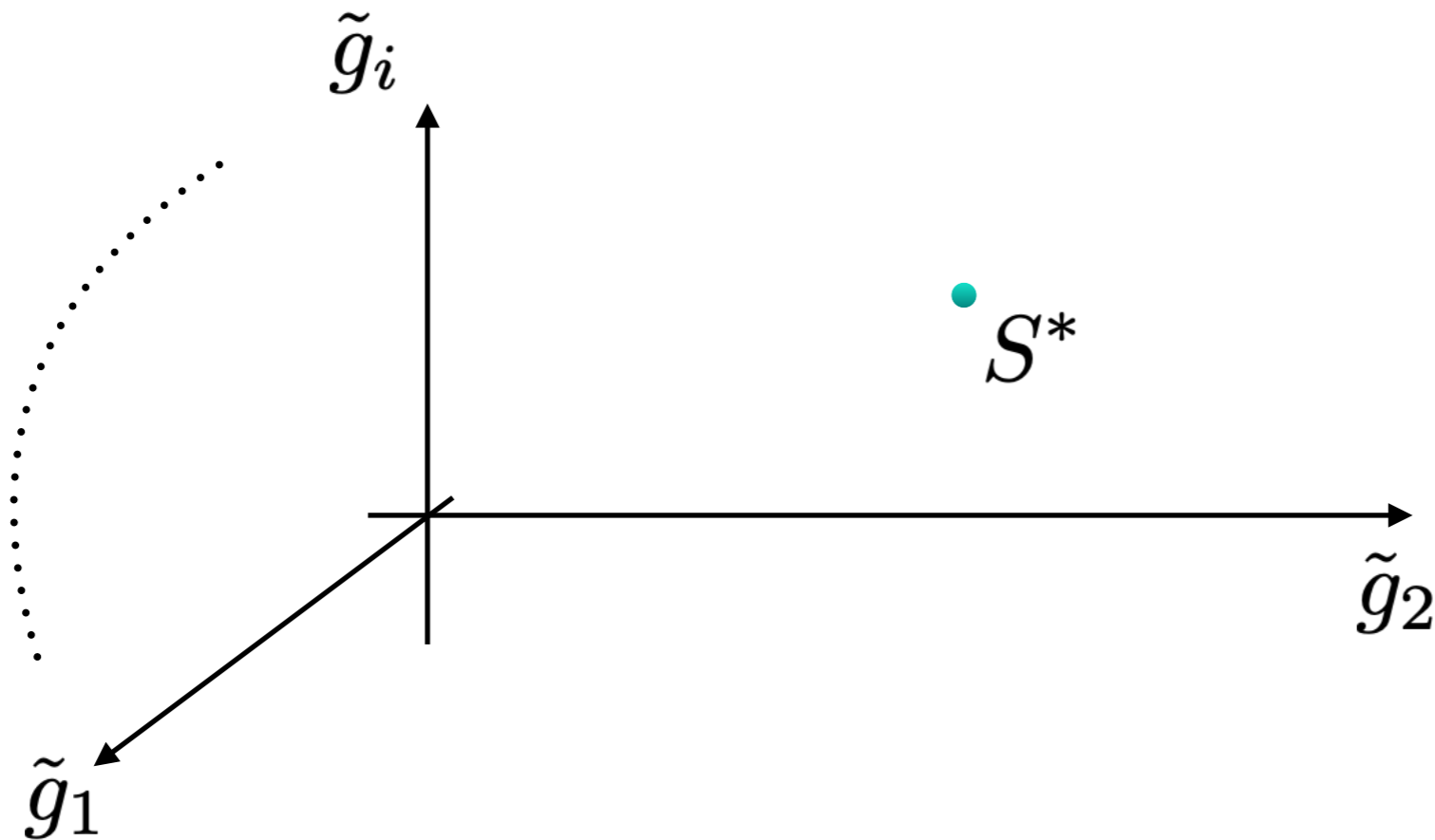
くりこみ変換（粗視化）
で生成した異常次元

$$\eta_k = - \frac{k \partial_k Z_k}{Z_k}$$

- 固定点は正準スケーリングとループ効果の競合で出てくる。

連続極限の存在 = 固定点の存在

くりこみ変換で変化しない点



$$S_k = \int \left[\tilde{g}_1(k) \tilde{\mathcal{O}}_1 + \tilde{g}_2(k) \tilde{\mathcal{O}}_2 + \cdots + \tilde{g}_i(k) \tilde{\mathcal{O}}_i + \cdots \right]$$

固定点

$$k \partial_k S_k^* = 0 \quad \longrightarrow \quad k \partial_k \tilde{g}_i^* = 0 \quad \text{全ての } i \text{ に対して}$$

臨界指数（スケーリング次元）

固定点の周りでのエネルギー依存性

- くりこみ群方程式 $k\partial_k \tilde{g}_i = \beta_i(\{\tilde{g}\})$

- 固定点周りでテイラー展開する

$$k\partial_k \tilde{g}_i = \beta_i(\{\tilde{g}^*\}) + \frac{\partial \beta_i(\{\tilde{g}\})}{\partial \tilde{g}_j} \Big|_{g=g^*} (\tilde{g}_j - \tilde{g}_j^*) + \dots$$

固定点の定義でゼロ

安定性行列 (stability matrix)

- 線形方程式なので解ける：

$$\tilde{g}_i = \tilde{g}_i^* + \sum_j C_j \underline{V^j}_i \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-\theta_j}$$

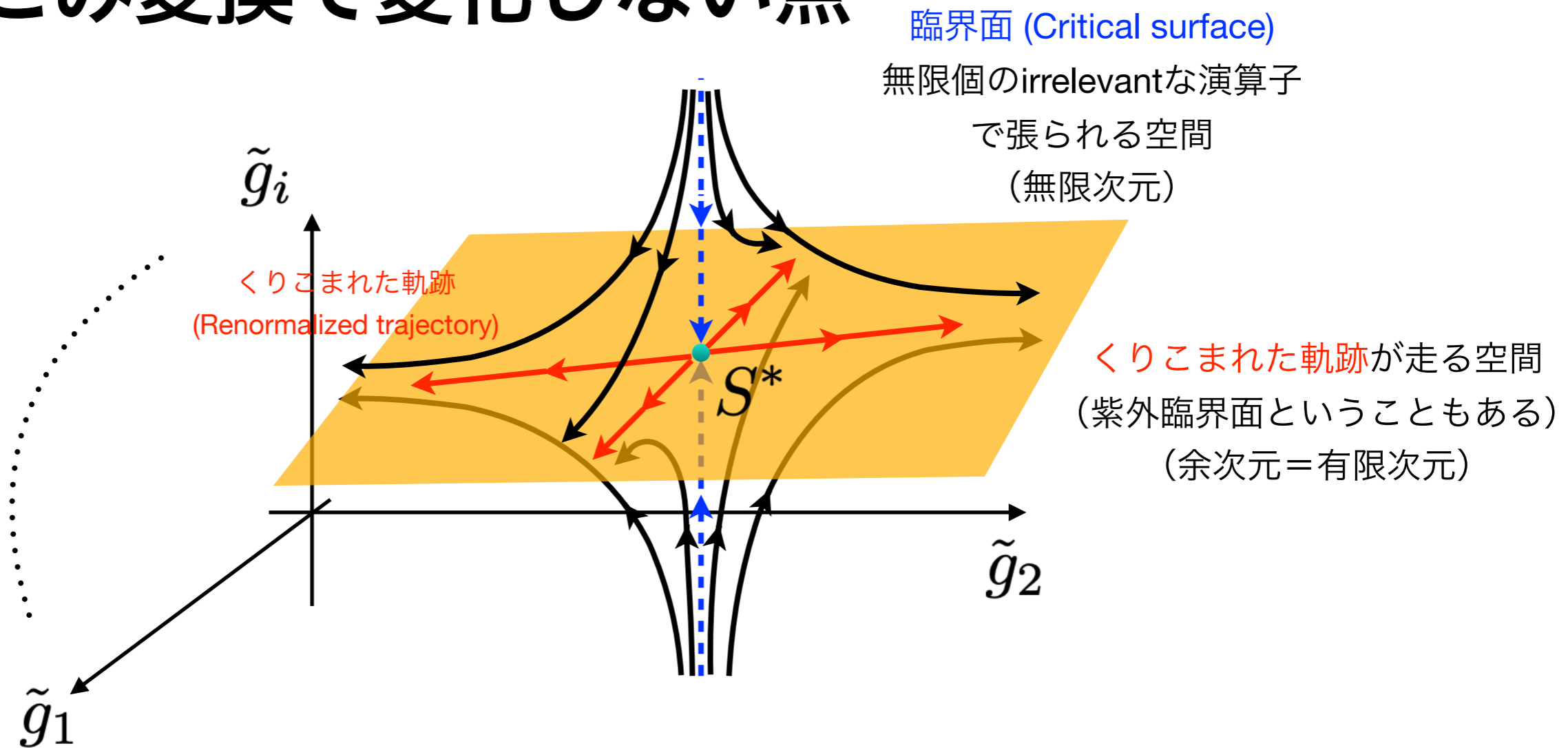
安定性行列を
対角化する行列

P.51-52を参照

- 臨界指数（スケーリング次元） θ_i ：安定性行列の固有値

理論空間内での固定点の存在

くりこみ変換で変化しない点



- 固定点から離れていく方向： $\theta_i > 0$ Relevant (重要な) (経験的に**有限個**)
固定点周りでくりこみ可能という
- 固定点に近づいていく方向： $\theta_i < 0$ Irrelevant (重要じゃない) (一般に**無限個**)
- 固定点にとどまる： $\theta_i = 0$ Marginal (中立な)

固定点と臨界指数

ガウス固定点（自明な固定点）

$$\tilde{g}_1^* = \tilde{g}_2^* = \dots = 0$$

- 自由場の理論。いわゆる摂動論はガウス固定点周りでの摂動。
- 臨界指数は結合定数の質量次元と一致する。

- 例：D=4 スカラー場

$$\begin{array}{lll} \theta_{m^2} = 2 & \theta_\lambda = 0 & \theta_\kappa = -2 \quad \dots \\ \text{Relevant} & \text{marginal} & \text{Irrelevant} \end{array}$$

- ガウス固定点から少しずらして、 $\tilde{\lambda}^* = \epsilon \ll 1$

$$k\partial_k \tilde{\lambda} = \frac{3}{16\pi^2} \tilde{\lambda}^2 \longrightarrow \theta_\lambda \simeq -\frac{\partial\beta_\lambda}{\partial\tilde{\lambda}} \Big|_{\tilde{\lambda}=\epsilon} = -\frac{3}{8\pi} \epsilon < 0 \quad \text{Marginally irrelevant}$$

固定点と臨界指数

ガウス固定点（自明な固定点）

$$\tilde{g}_1^* = \tilde{g}_2^* = \dots = 0$$

- 自由場の理論。いわゆる摂動論はガウス固定点周りでの摂動。
- 臨界指数は結合定数の質量次元と一致する。

- 例：D=4 QCD

$$\theta_{g^2} = 0$$

marginal

他はirrelevant

- ガウス固定点から少しずらして、 $\tilde{g}_k^* = \epsilon \ll 1$

$$k\partial_k \tilde{g}_k^2 = -\frac{11}{8\pi^2} \tilde{g}_k^4 \longrightarrow \theta_{g^2} \simeq -\frac{\partial \beta_g}{\partial \tilde{g}_k^2} \Big|_{\tilde{g}=\epsilon} = +\frac{33}{4\pi^2} \epsilon^2 > 0 \quad \text{Marginally relevant}$$

固定点と臨界指数

非自明な固定点

- 非自明な固定点： $\tilde{g}_1^* \neq 0, \tilde{g}_2^* \neq 0, \dots$

- 臨界指数は完全に非自明

- 大雑把には正準次元と異常次元の和

- 例えば、

$$k\partial_k \tilde{g} = -(d_g - \eta)\tilde{g} + \beta_g$$

$$\theta = \underbrace{d_g - \eta}_{\text{正準次元}} + \underbrace{\frac{\partial \beta_g}{\partial g}}_{\text{異常次元}} \Big|_{g=g^*}$$

正準次元

異常次元

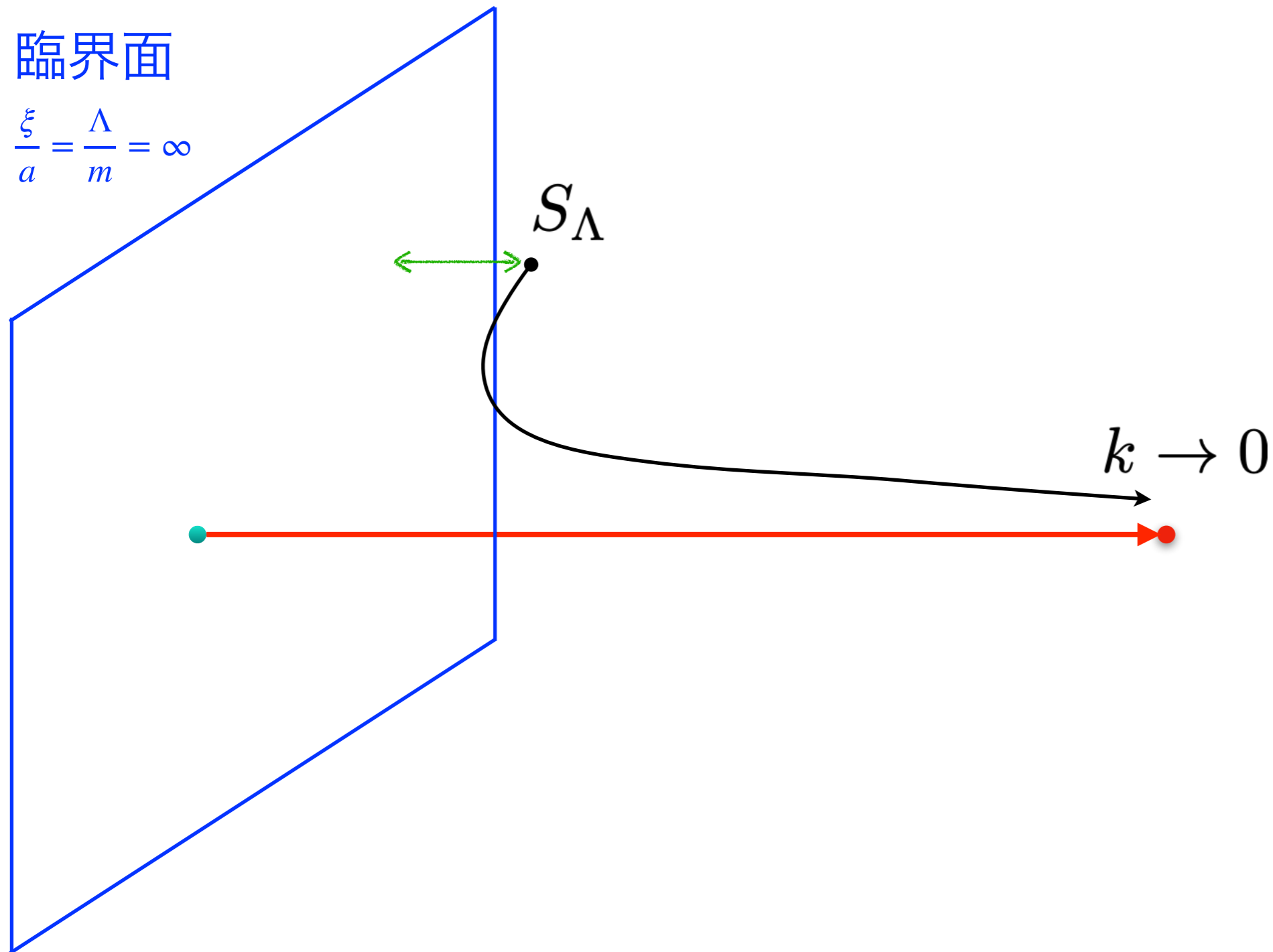
連続極限の候補

非自明な理論でくりこみ変換が無限回できるか？

- 固定点直上 S^* は候補の一つ。
 - 理論がスケール不変になるので、くりこみ変換で変化しない。
 - 質量スケール ($m_{\text{phy}} = 0$) がない理論 (CFT) になる。
 - しかし、現実には質量がある： $m_{\text{phy}} \neq 0$
- 質量が有限となるような連続極限は？
- カットオフが大きい=フローの”時間”が長い。
 - 固定点の性質を利用する： $\partial_t \tilde{g}_i = k \partial_k \tilde{g}_i \approx 0$
 - 固定点近傍ではフローは”ゆっくり”変化。

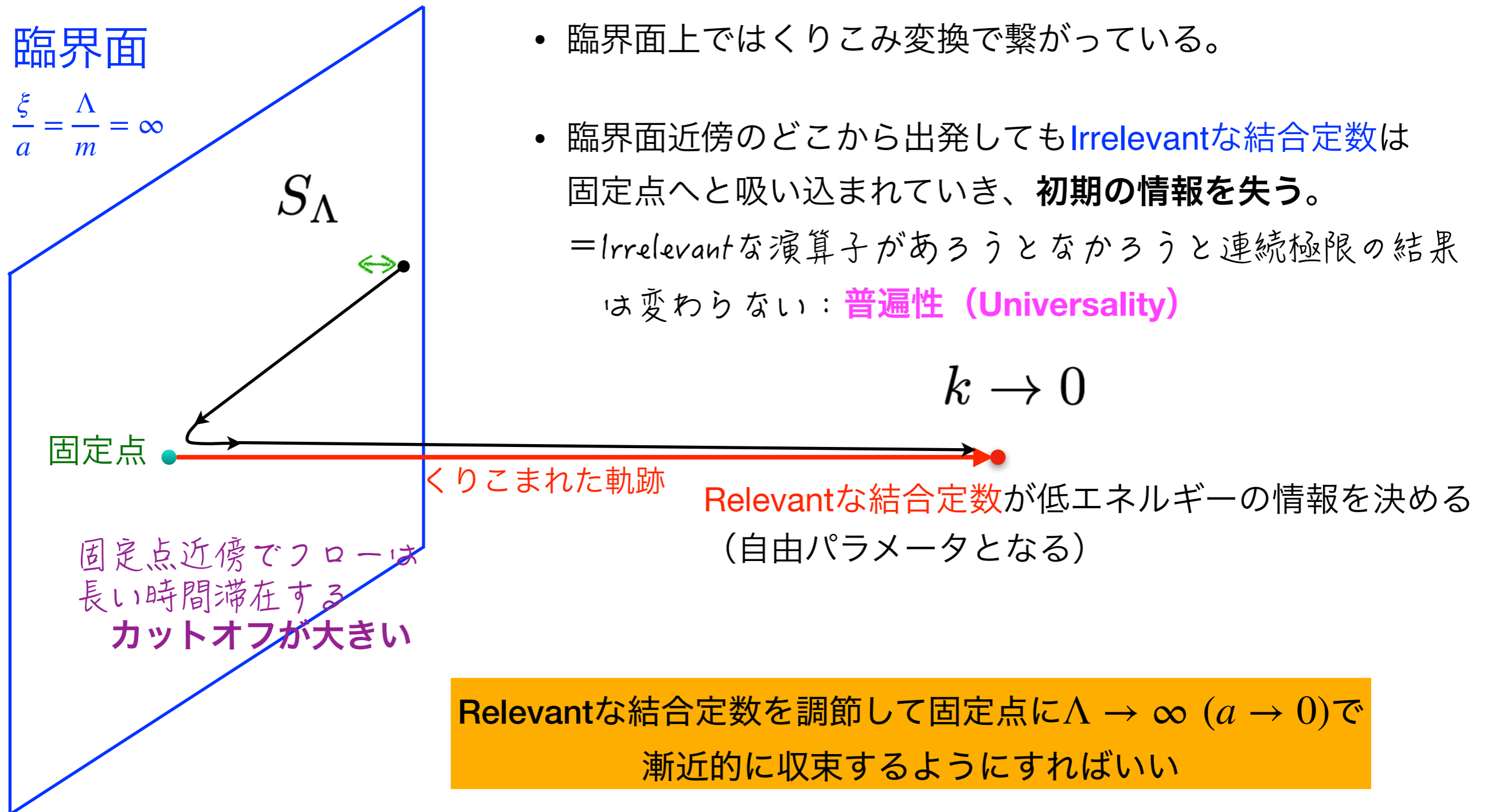
臨界面から離れたフロー

早く流れて、短時間で赤外へ：カットオフが小さい



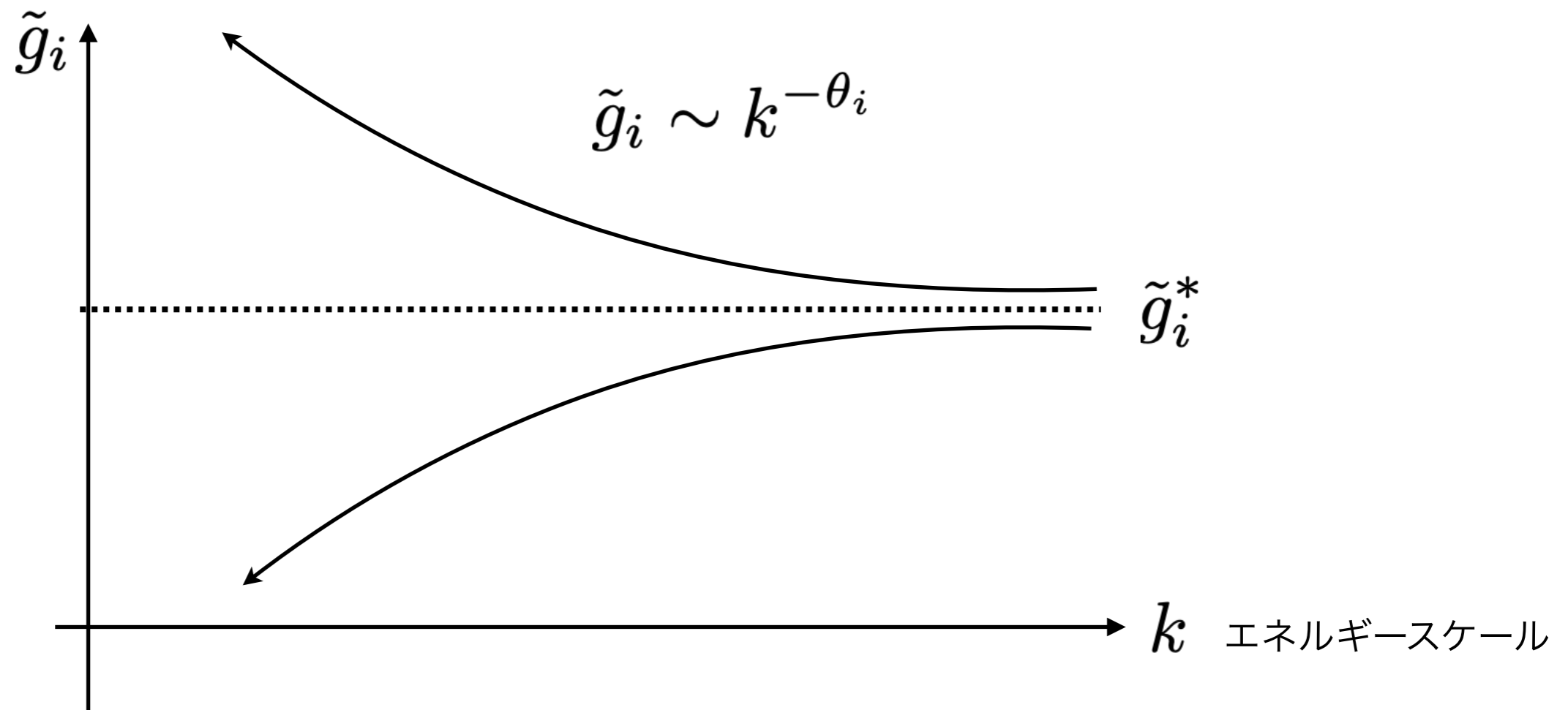
臨界面近傍からのフロー

固定点近傍でフローが長時間滞在して赤外へ：カットオフが大きい



Relevant : $k \rightarrow 0$ で固定点から離れる

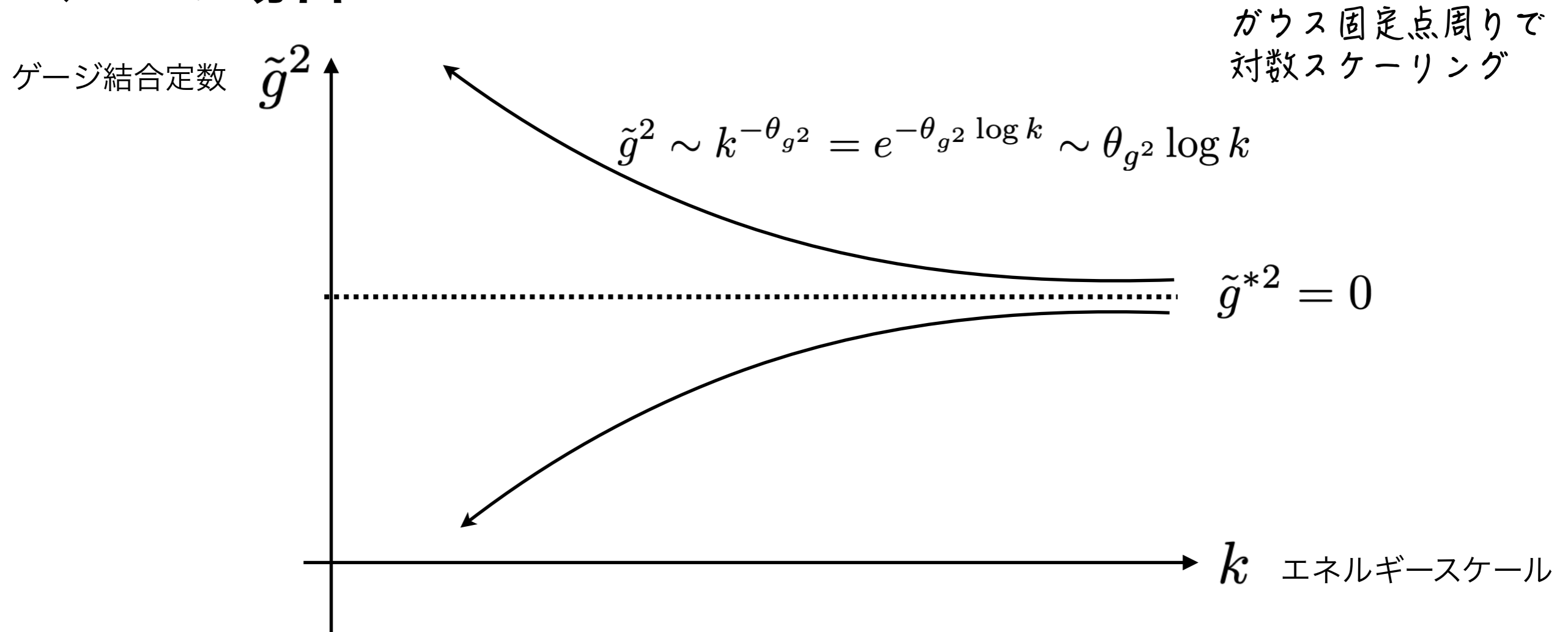
$$\theta_i > 0$$



- UVで漸近的に固定点に近づいていく：紫外固定点 (UV fixed point)
- 結合定数は固定点に収束：漸近的安全性
- 任意のスケールで結合定数の値を自由に選べる：自由パラメータ

Relevant : $k \rightarrow 0$ で固定点から離れる

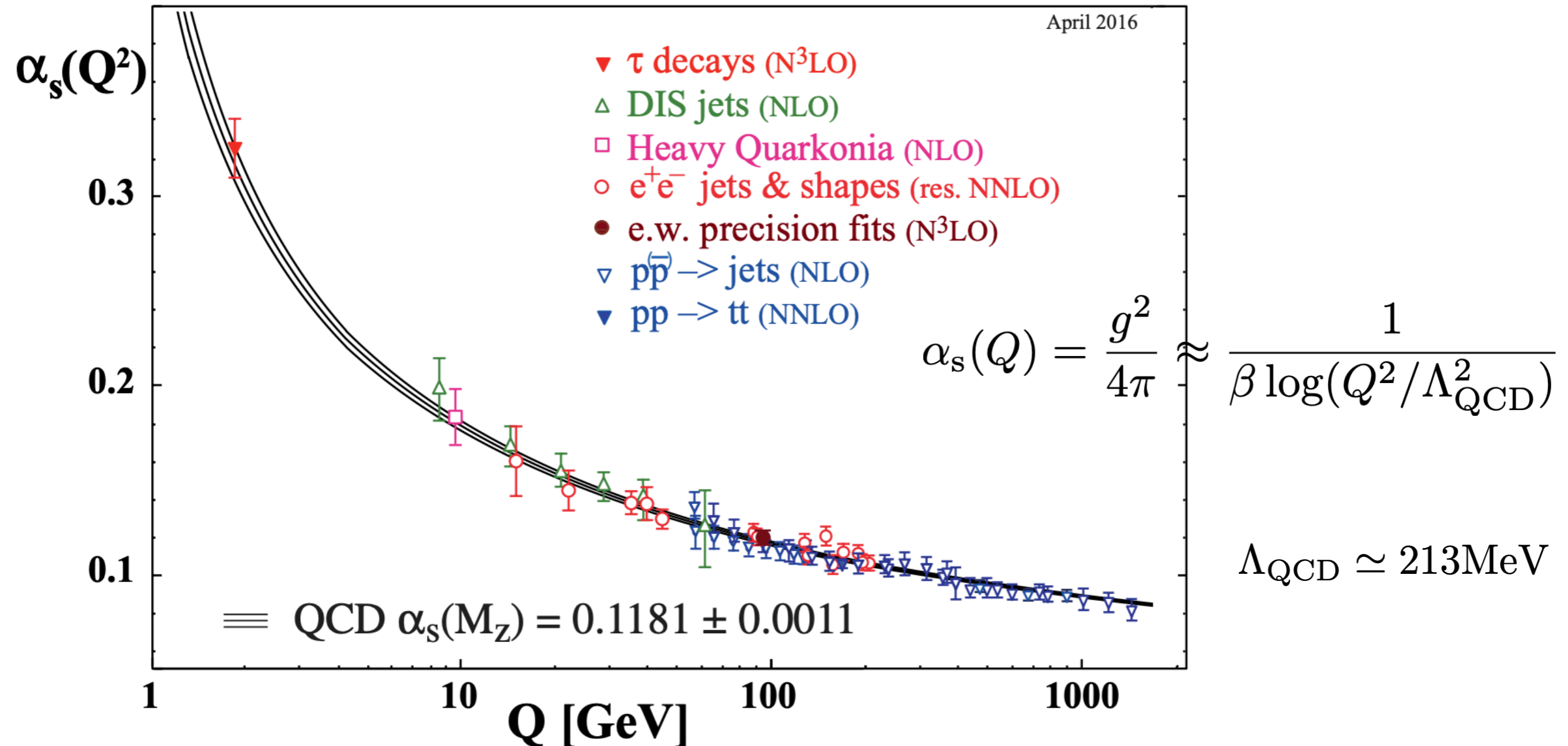
QCDの場合



- UVで漸近的に固定点に近づいていく
 - 紫外ガウス固定点 (UV Gaussian fixed point)
- 結合定数はガウス固定点に収束：漸近的自由性 (漸近的安全性の一種)

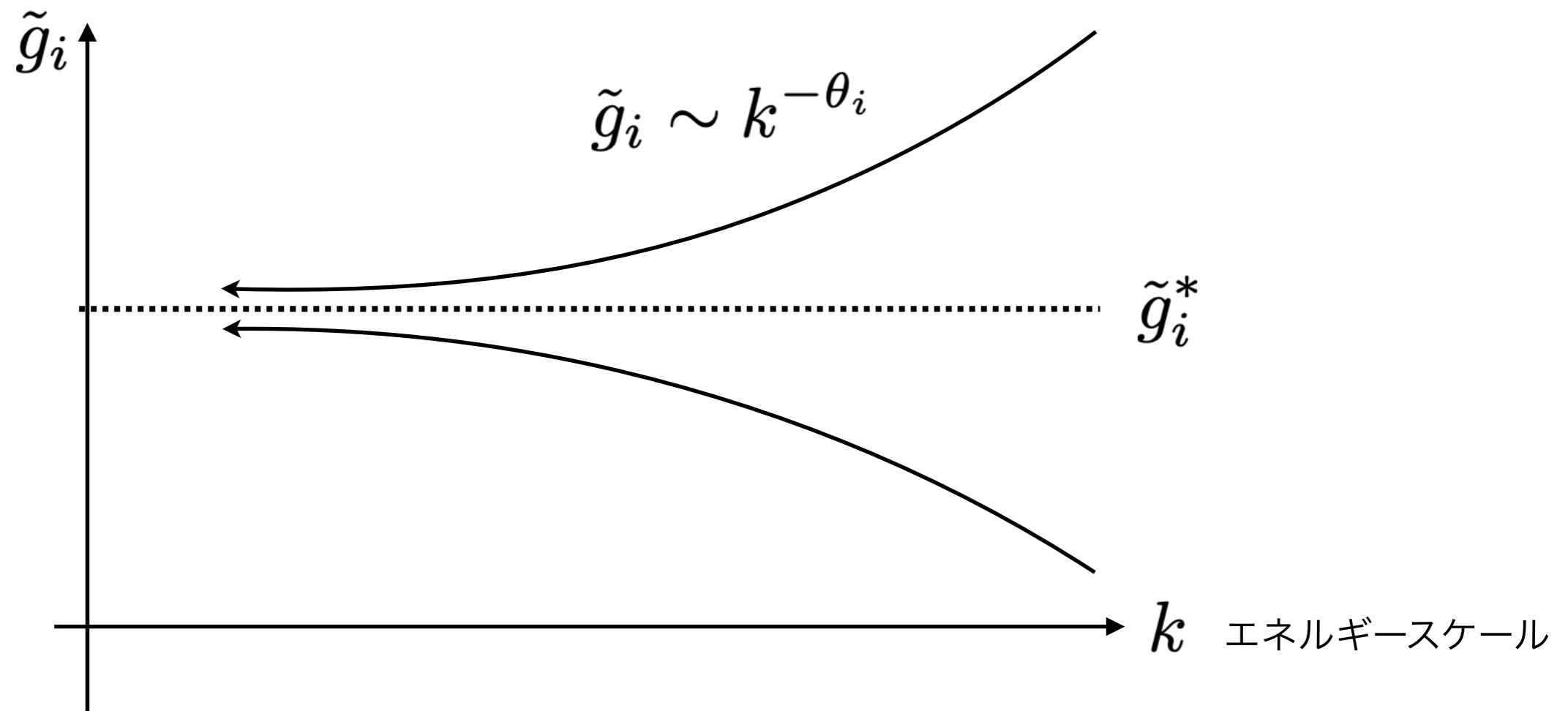
QCDゲージ結合定数のくりこみ群フロー

北原さんがmentionしたので急遽入れました



Irrelevant : $k \rightarrow 0$ で固定点に近づく

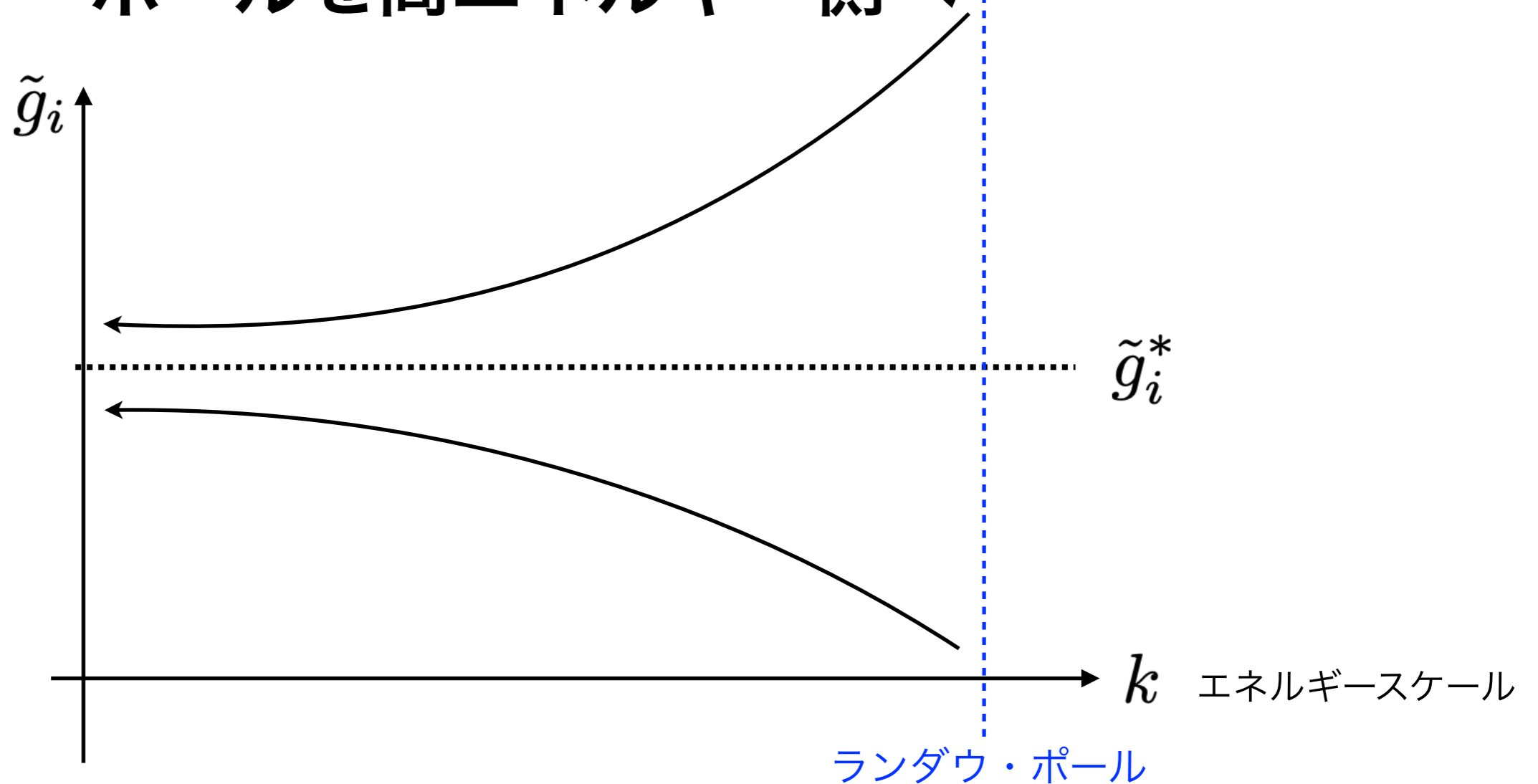
$$\theta_i < 0$$



- UVで固定点から離れていく。逆にIRで固定点に近づいていく。
赤外固定点 (IR fixed point)

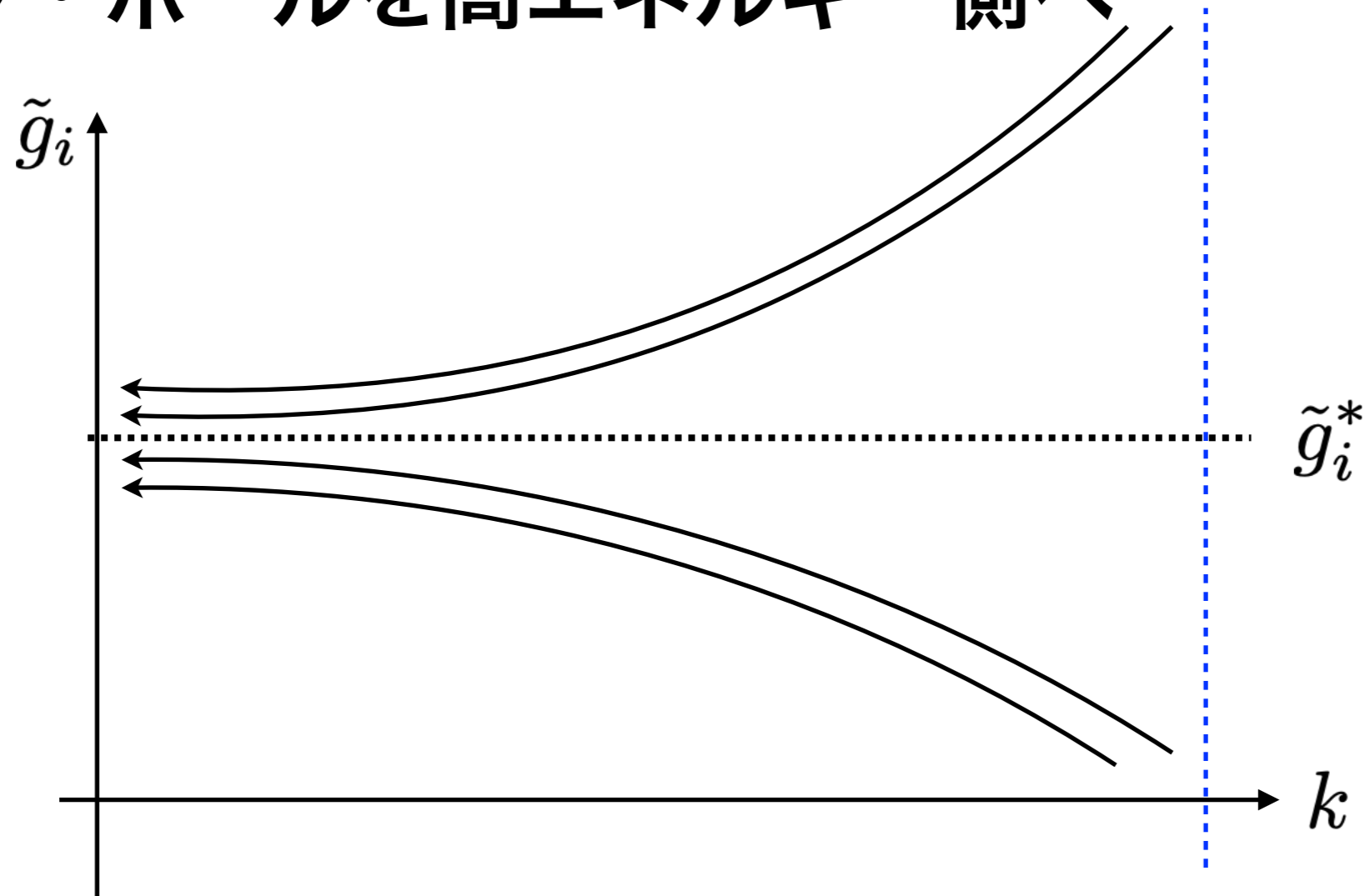
ランダウ・ポールを避けたい

ランダウ・ポールを高エネルギー側へ



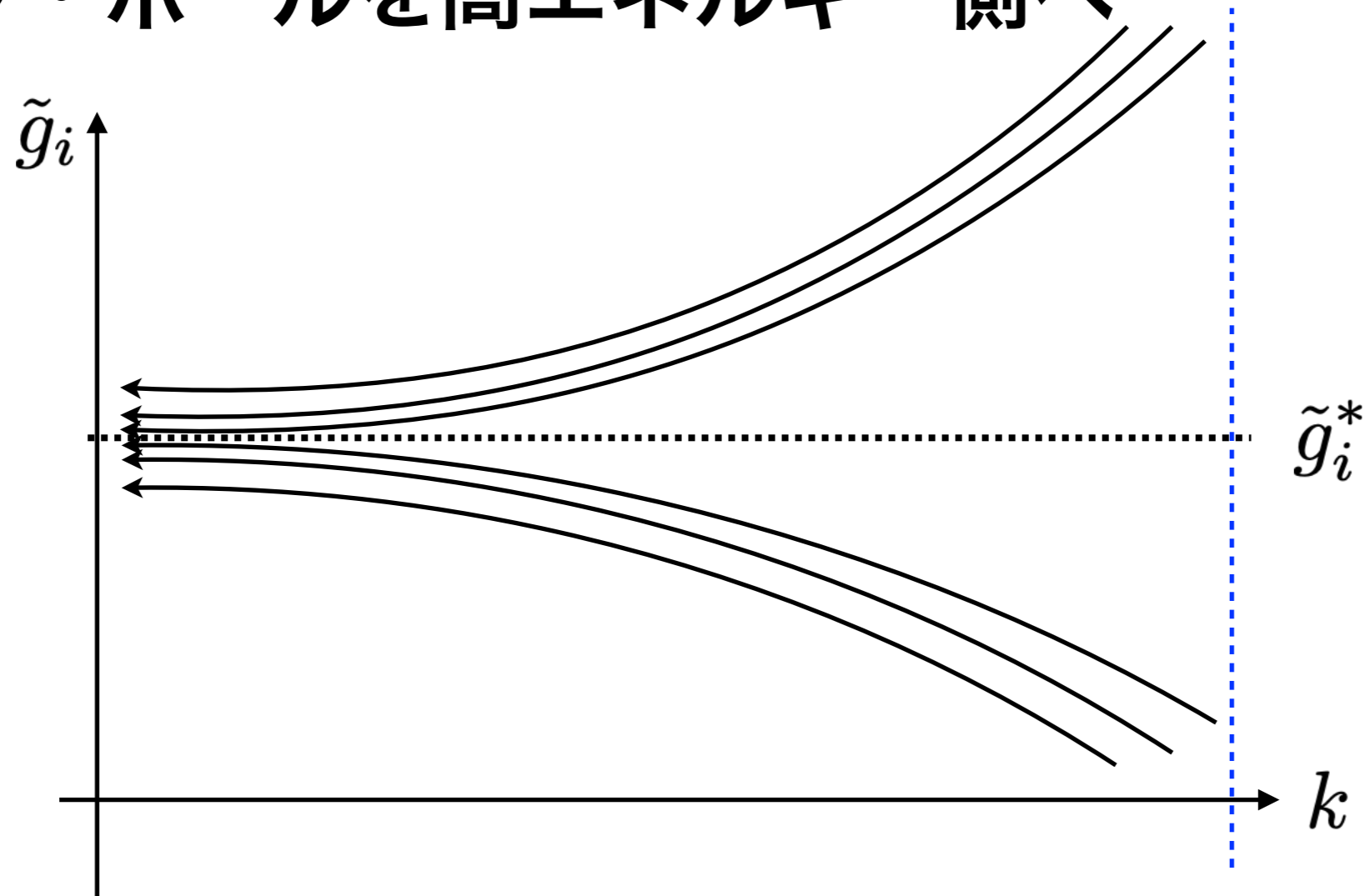
ランダウ・ポールを避けたい

ランダウ・ポールを高エネルギー側へ



ランダウ・ポールを避けたい

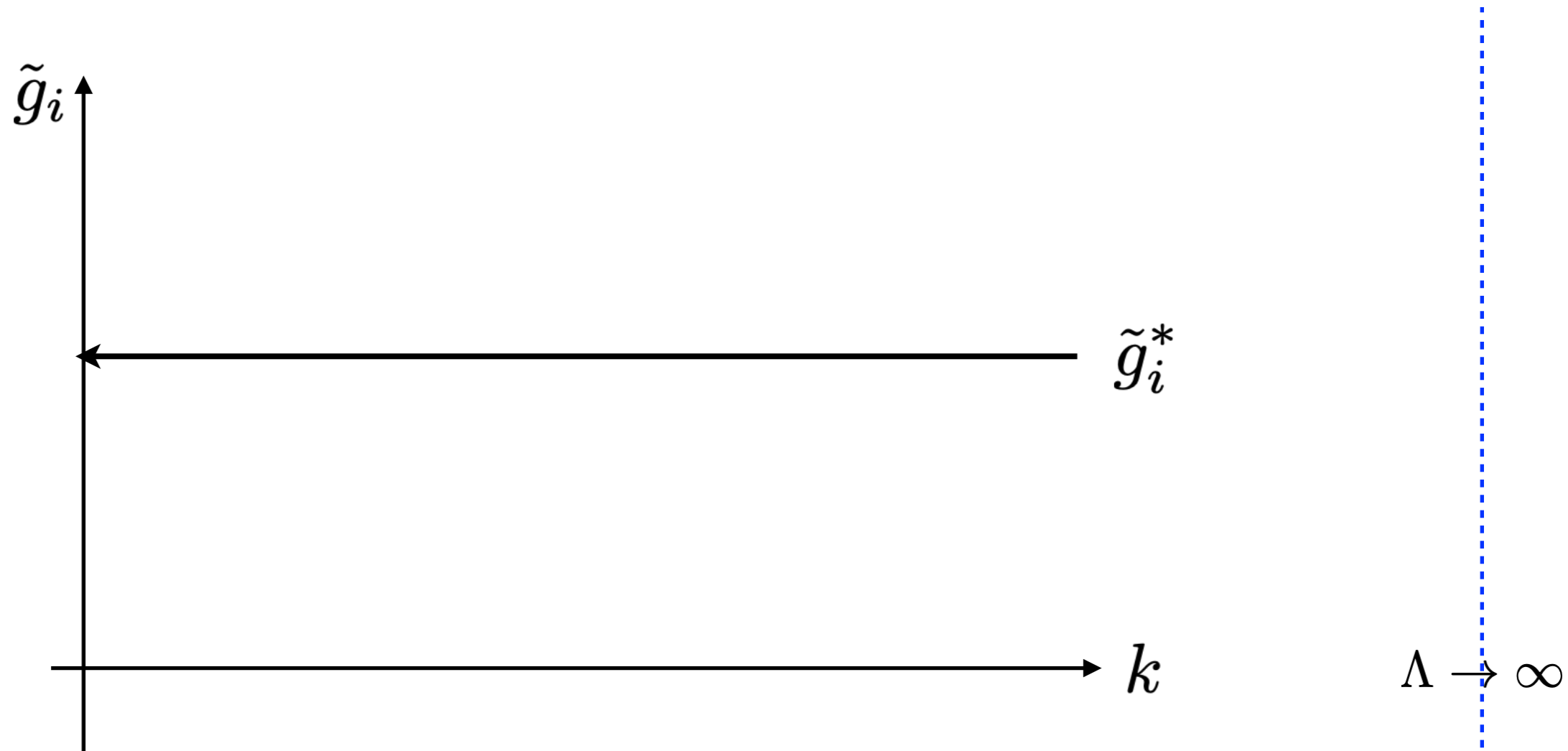
ランダウ・ポールを高エネルギー側へ



- 固定点により近いフローはランダウ・ポールの位置がより高エネルギー側へと移動する。

Irrelevant : $k \rightarrow 0$ で固定点に近づく

$$\theta_i < 0$$



- Irrelevantな結合定数を固定点に乗るように”fine tune”すると発散は無くなる。
- 結合定数の値は固定点で決まってしまう：**予言されるパラメータ**

具体例：スカラー理論

- 有効作用

$$S_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 + \frac{m_k^2}{2Z_k} \phi_R^2 + \frac{\lambda_k}{4Z_k^2} \phi_R^4 + \frac{\kappa_k}{6Z_k^3} \phi_R^6 + \dots \right]$$

- くりこみ群方程式 (LPA: $Z_k = 1; \eta = 0$)

$$k \partial_k \tilde{m}_k^2 = -2\tilde{m}_k^2 - \frac{\tilde{\lambda}_k}{6d\pi^2(1 + \tilde{m}_k^2)^2}$$

$$k \partial_k \tilde{\lambda}_k = -(4 - d)\tilde{\lambda}_k + \frac{3\tilde{\lambda}_k^2}{d\pi^2(1 + \tilde{m}_k^2)^3} - \frac{15\tilde{\kappa}_k}{4d\pi^2(1 + \tilde{m}_k^2)^2}$$

$$k \partial_k \tilde{\kappa}_k = -(6 - 2d)\tilde{\kappa}_k - \frac{6\tilde{\lambda}_k^3}{6d\pi^2(1 + \tilde{m}_k^2)^4} - \frac{15\tilde{\lambda}_k \tilde{\kappa}_k}{d\pi^2(1 + \tilde{m}_k^2)^3} + \dots$$

⋮

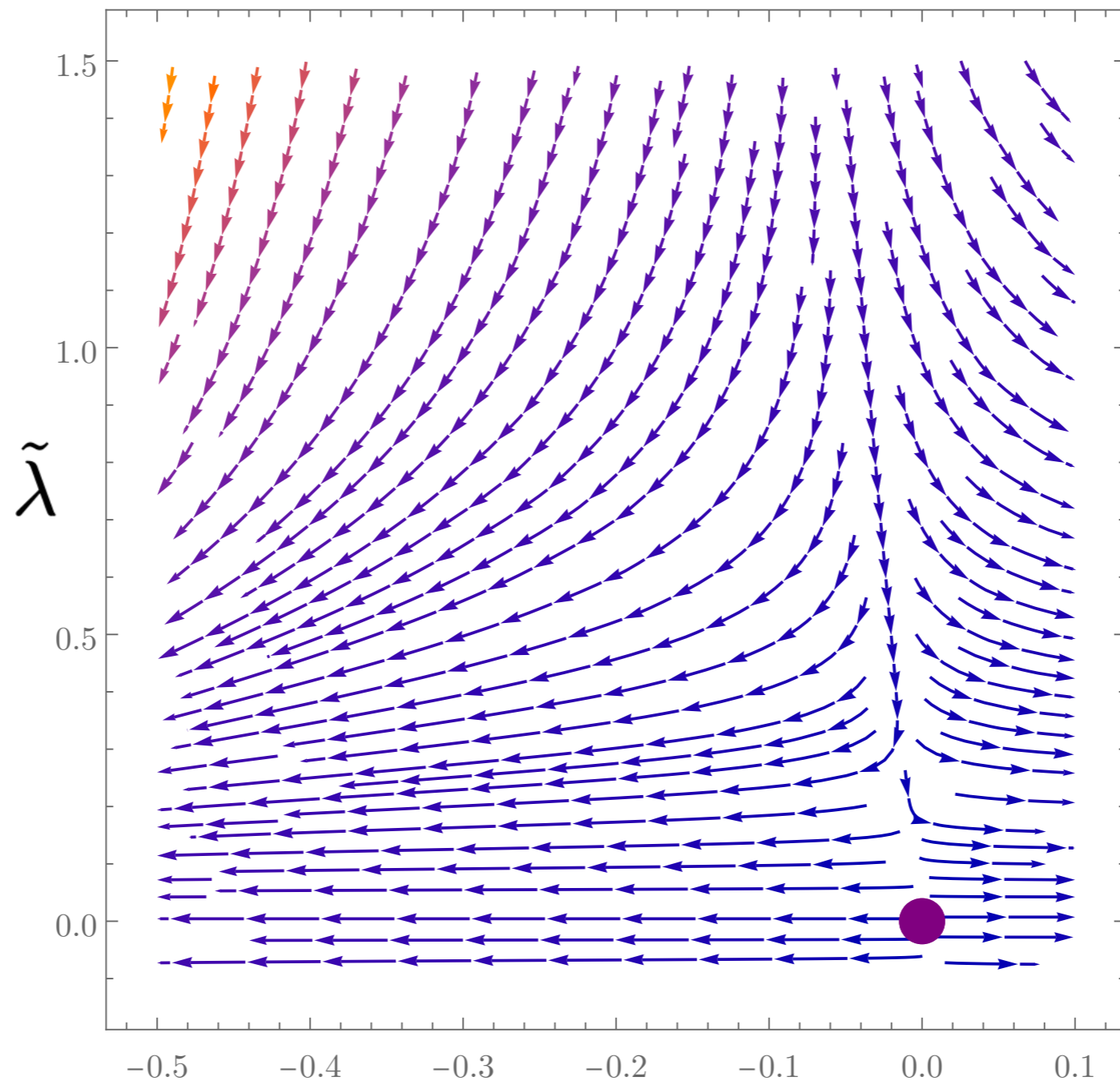
- 以下では、 $\tilde{m}_k^2 = \frac{m_k^2}{Z_k k^2}$ $\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{Z_k^2}$ の2次元面で考える。

具体例：スカラー理論

4次元のとき

矢印の方向

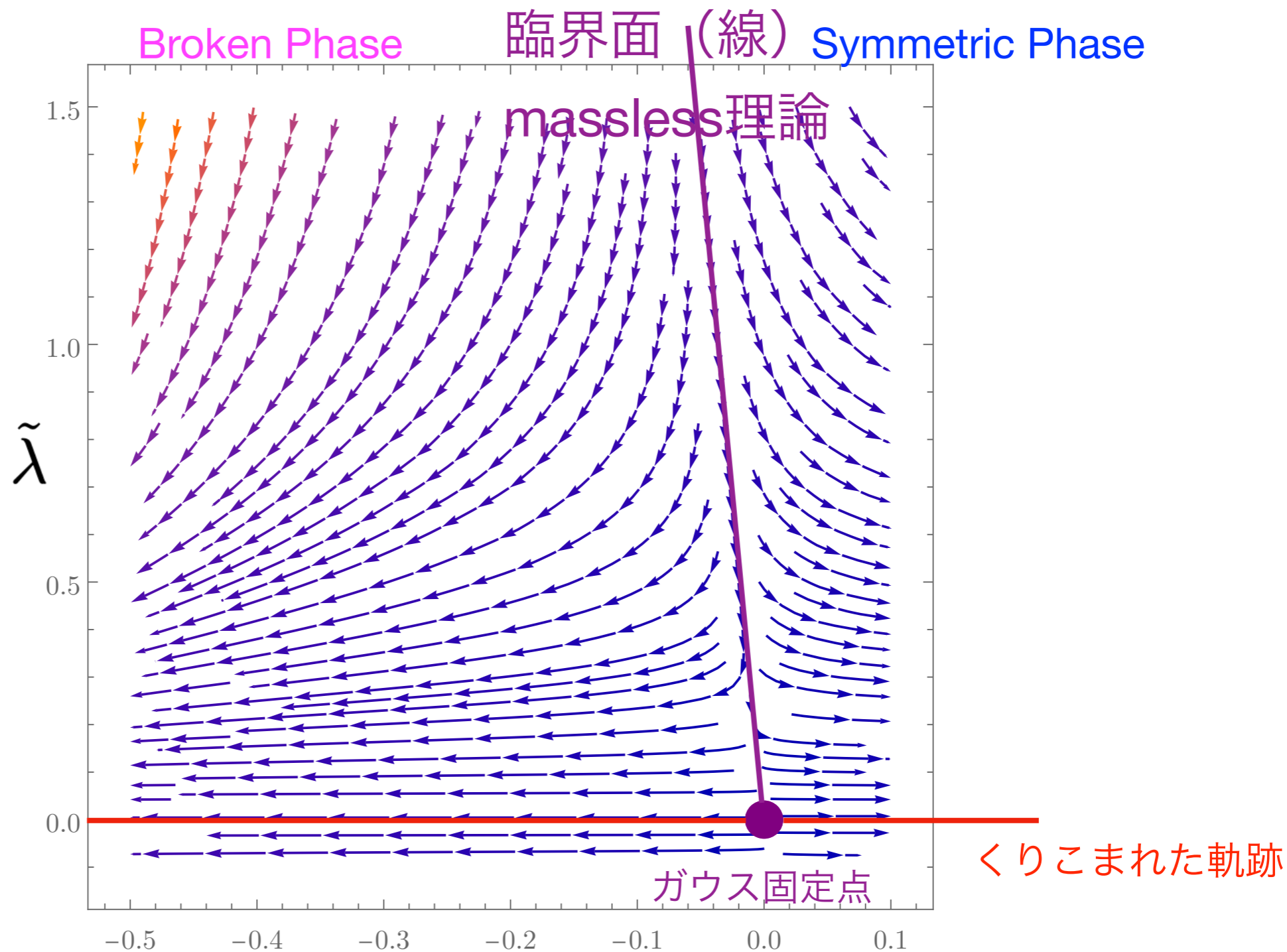
UV→IR



具体例：スカラー理論

4次元のとき：連続極限を取ると自明な理論

矢印の方向
UV→IR



具体例：スカラー理論

標準模型（ヒッグス）は、何故か ほぼ臨界状態

- 標準模型：プランク・スケールで定義されてる (?)

$$\Lambda = M_{\text{pl}} = 10^{19} \text{ GeV}$$

- ヒッグス場の質量はだいたい $m_H = 10^2 \text{ GeV}$

$$S_{\Lambda=M_{\text{pl}}} = \int d^4x \left[(\partial_\mu H)^2 + \underbrace{m_\Lambda^2}_{=10^{-34} M_{\text{pl}}^2} H^\dagger H + \lambda_\Lambda (H^\dagger H)^2 \right]$$

- 無次元の質量パラメータは $\tilde{m}_\Lambda = \frac{m_\Lambda}{\Lambda} = \frac{m_H}{M_{\text{pl}}} = 10^{-17}$

- ほぼゼロ = ほぼ臨界状態 = 相境界に近い

- ゲージ階層性問題 = なぜ我々の宇宙は臨界状態に近いのか？

我々の宇宙

ヒッグスは相境界ギリギリのところを辿ってる。



我々の宇宙

ヒッグスは相境界ギリギリのところを辿ってる。



臨界面（線） についてのコメント

臨界面の位置は2次発散が決めけている

- 臨界面は、P.75-76のフロー図では、臨界面は直線になっている。
 - つまり、 $\tilde{m}_k^2 = -C\tilde{\lambda}$ 。Cは（カットオフスキームに依る）定数。
 - 有次元量で書くと、 $m_k^2 = -C\lambda k^2$
 - $k = \Lambda$ では、 $m_\Lambda^2 = -C\lambda\Lambda^2$
- 要は、臨界面に近いというのは、ループ計算における質量補正としての2次発散を、裸の質量で相殺しないと質量が小さくならないということ。

$$\underline{m_R^2} = \frac{m_\Lambda^2}{} + \frac{\text{circle}}{\lambda}$$

臨界面（線） についてのコメント

もし、標準模型の裸の作用がプランクスケールで定義されているなら

- 2次発散は裸の質量と精密に相殺して、電弱スケールを出している。

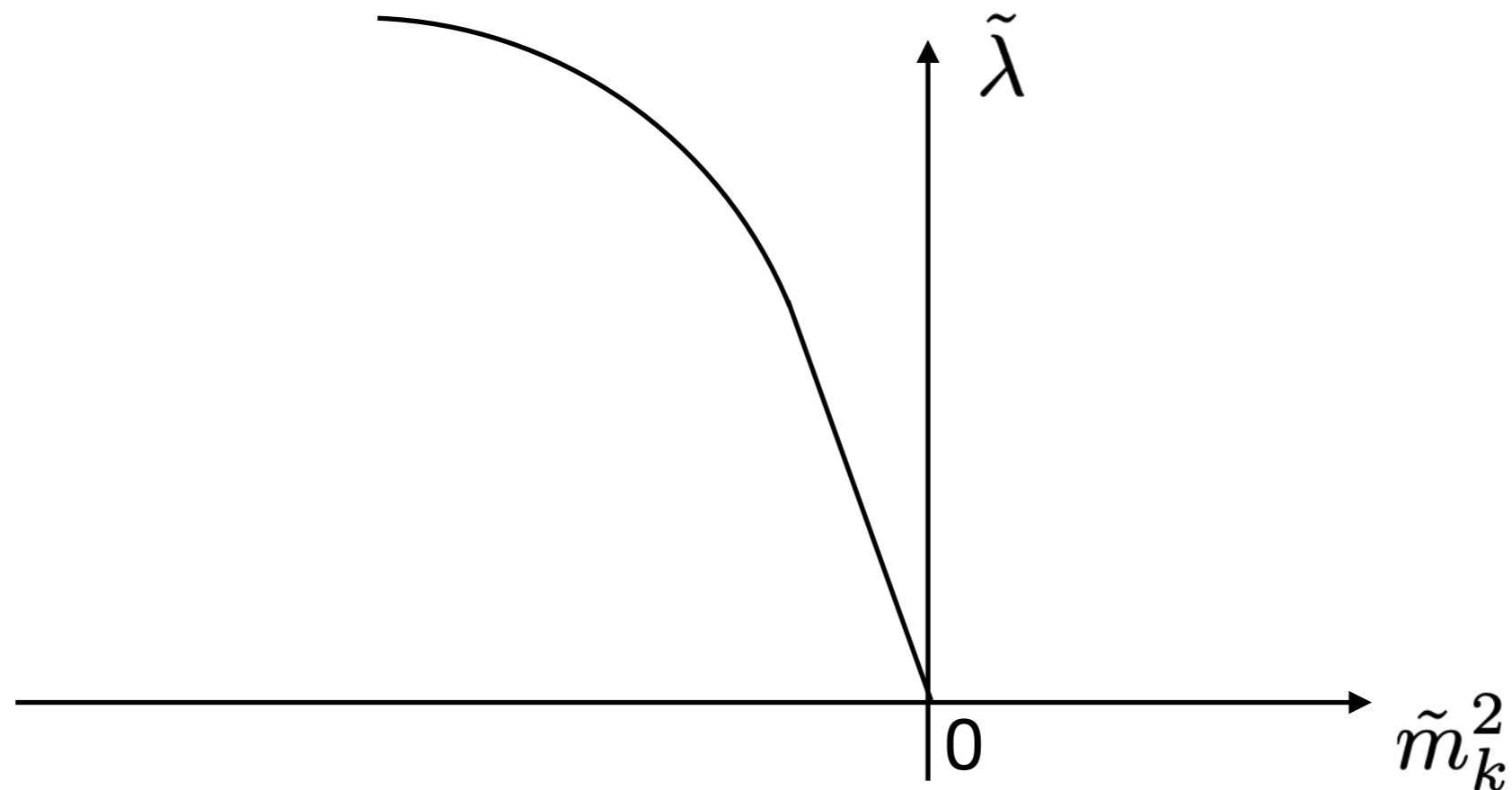
$$m_R^2 = m_\Lambda^2 + \# M_{\text{pl}}^2 \approx 10^2 \text{ GeV}^2$$

- この問題は長らく、ゲージ階層性問題と呼ばれている。
- 超対称性は、スーパーパートナーのおかげで、#がゼロになっている。
- この微調整は、裸のパラメータを臨界面に近くに置いているということに対応している。
- これは $\frac{m_R}{M_{\text{pl}}} = 10^{-17}$ だから臨界状態に近いということ。

臨界面（線） についてのコメント

臨界面は一般に直線とは限らない

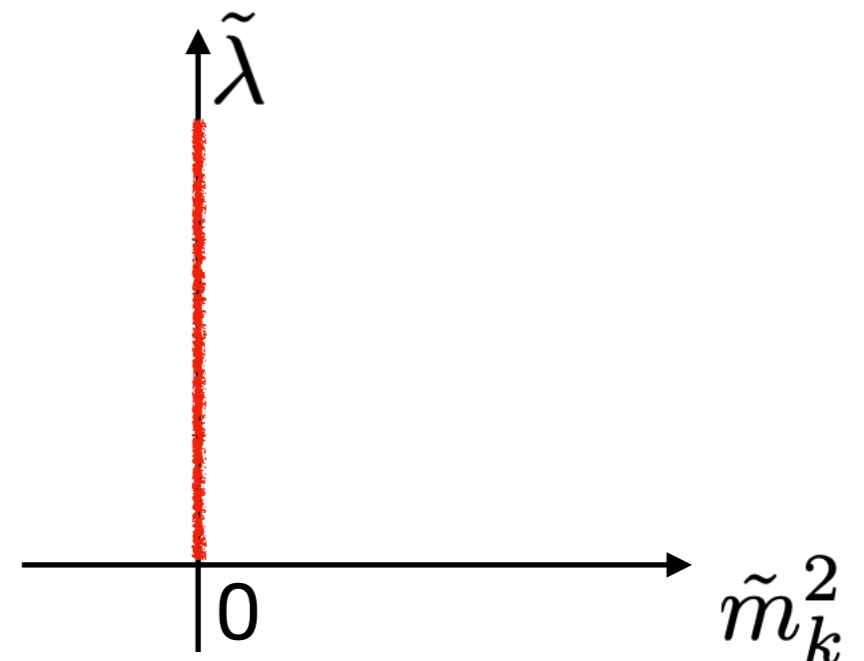
- 臨界面が直線になっているのは、ガウス固定点周りだと、結合定数が小さいため、摂動展開の1次で十分なので、直線がよい近似になっているというだけで、相互作用が大きくなると（ λ が大きい領域）、臨界面はもはや直線ではなく、相互作用により曲がってくる。



臨界面（線） についてのコメント

臨界線の位置（2次発散）に物理的意味はあるのか？

- 臨界線の「位置」は、理論空間の座標の取り方に強く寄っている。
- 理論空間の座標の取り方は、カットオフスキームの取り方のこと。
- カットオフスキームを変えれば、臨界線の位置は変わる。
- 事実、次元正則化では、2次発散に対応する発散は出てこない。
- これは、臨界線が $\tilde{m}_k^2 = 0$ となるような位置にあることに対応する（？）
- 2次発散に意味はあるのだろうか？

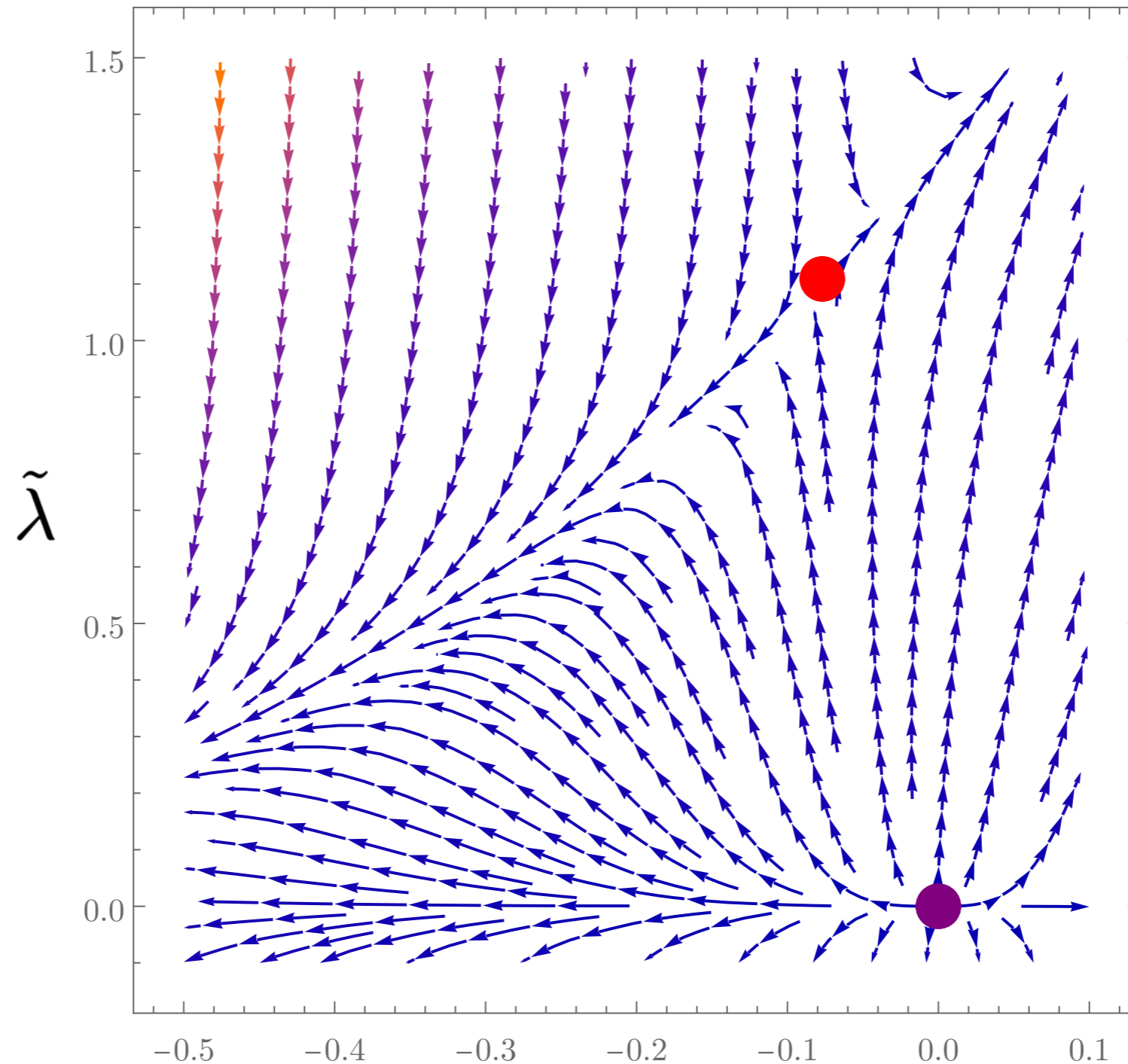


具体例：スカラー理論

3次元のとき

矢印の方向

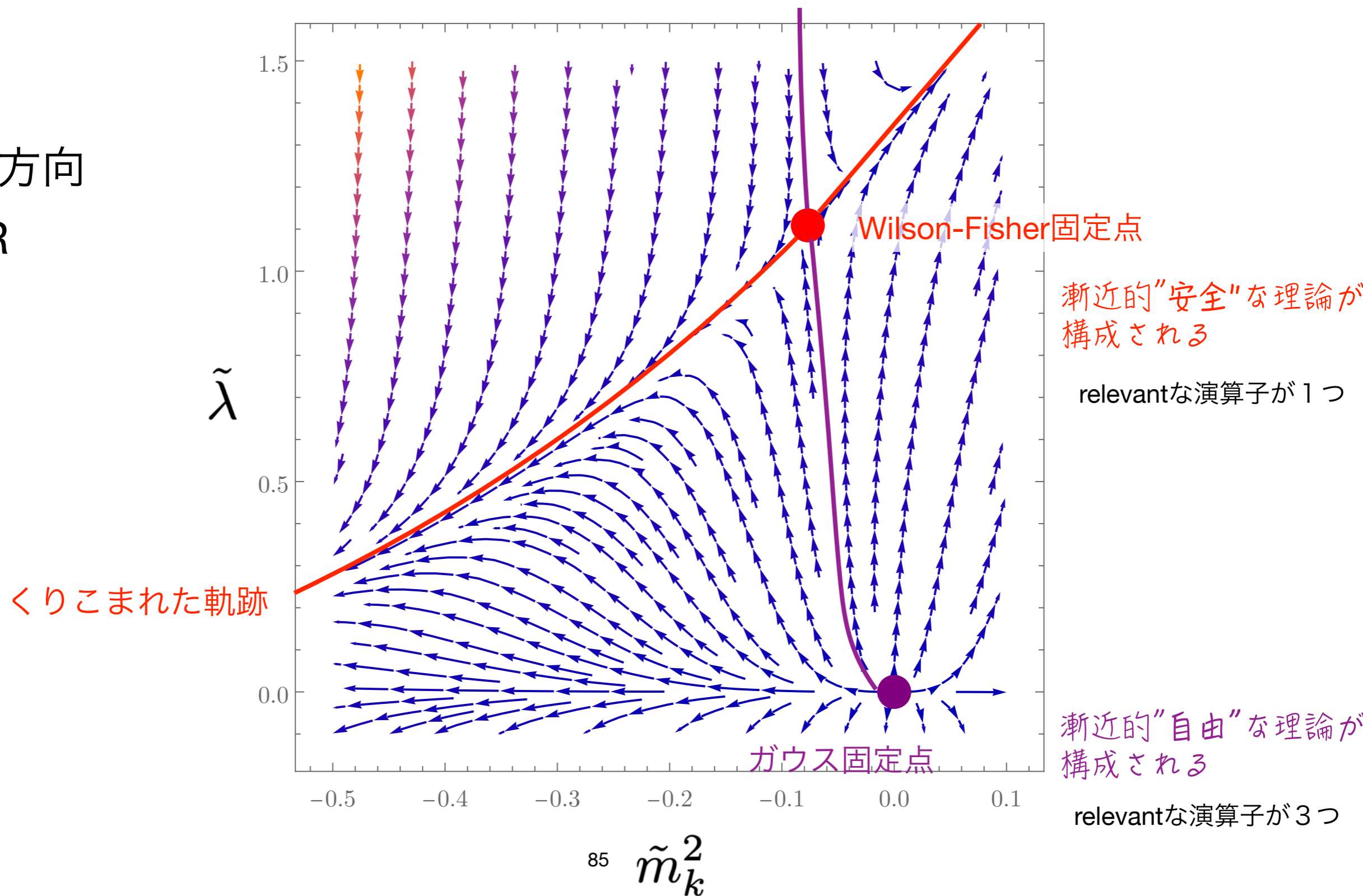
UV→IR



具体例：スカラー理論

3次元のとき：連続極限の候補は2つある

矢印の方向
UV→IR



具体例：Yang-Mills理論

4次元のとき

- 有効作用

$$S_k = \int d^4x \left[\frac{1}{4g_k^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \kappa_k F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_{\rho}{}^{\mu} + \lambda_k (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \dots \right]$$

- 固定点：ガウス固定点しか見つからない。
- ガウス固定点で、
 - ゲージ結合定数 g_k はmarginally relevant：自由パラメータになる (固定点直上だと $\theta_g = 0$ だけど、ちょっとずらすと $\theta_g > 0$)
 - 他の定数は全てirrelevant ($\theta_i < 0$)
- 次で説明しますが、これが格子ゲージ理論の大切なところ。

なぜ連続極限が重要なのか

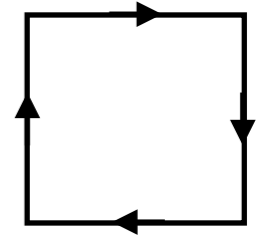
格子場の作用は一意じゃない

詳細は明日の山崎さんの講義を聞いてください

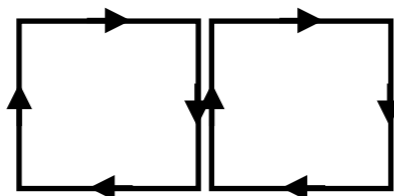
- 格子ゲージ場（リンク変数） $U_\mu(x) = e^{igaA_\mu(x)}$ に対して

$$S = \beta \sum_{\text{plaquette}} \left\{ 1 - \frac{1}{N} P_{\mu\nu} \right\} = \sum_x \left(1 - \frac{1}{2} a^4 g^2 \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \right)$$

$$P_{\mu\nu} = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x)$$



- ・・・にはゲージ不変な高次項が含まれている： $F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_\rho^\mu$ など

- これ以外で、としても $a \rightarrow 0$ とすれば、いずれも $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ が残る。

- でもこれは古典レベルでの連続極限の話。
- 格子場の作用の与え方による artefact を消したい。
- 量子論において、連続極限でも格子場の作用の与え方によって結果は変わらないのか？
- 説明した通り、ゲージ結合定数だけが relevant、他は irrelevant
- 普遍性：irrelevantがあっても連続極限の場の理論は変わらない。

具体例：Yang-Mills理論

4次元のとき

- ゲージ結合定数は唯一の自由パラメータ（無次元）
- くりこみ群方程式は微分方程式なので、自由パラメータの値は境界条件で固定される
- 例えば、 $k = 1 \text{ GeV}$ で $g = 1$ と決める。
 - 逆に言えば、 $g = 1$ となるスケールを**1 GeVと定義する**。
 - 自由パラメータの選び方がスケールの選び方になる。
 - 無次元量から有次元量へ：**次元転移**（dimensional transmutation）

連続極限を取りたい理由

- そもそも、場の量子論は、 $\Lambda \rightarrow \infty$ まで正しいのか？
(時空が本当にミクロスケール $a \rightarrow 0$ まで連続か？)
 - 弦理論とかUVの理論があるんだったら、それらが現れるスケールがあるから、それが標準模型のカットオフになるはずだから、 $\Lambda \rightarrow \infty$ とする必要はない？
- 上記の立場が正しいなら、エネルギーが ∞ からUV理論のスケールのエネルギーを積分して有効理論として標準模型が定義されているはず。(トップ・ダウン的アプローチ)
- しかし、我々はUV理論を知らず、低エネルギーの理論(標準模型)しか知らない。
- その低エネルギー理論に対するカットオフの入れ方を一意に決める方法を我々は知らない。ボトム・アップ的にしかUVの理論を探れない。
- そうすると、人によって標準模型に対するカットオフスキームの取り方が異なって、物理量の答えが異なるかも。それは困る。
- そのような状況をなくすには、 $\Lambda \rightarrow \infty$ (もしくは十分大きいカットオフスケール)とした極限を考えて、そのようなカットオフスキームの違いをなくす方がいいでしょう。

有効模型としての標準模型

ヒッグス場を例に

- 多くの研究では、標準模型におけるヒッグス場のポテンシャルは

$$S \sim \int_x m^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2$$

としているが、そもそも、標準模型が、UV理論の高エネルギーモード ϕ_χ を積分して得られたなら、Wilsonくりこみ群の観点から見れば、有限個の相互作用では済まないはず。対称性から許される無限個の演算子が生成される：

$$S_\Lambda \sim \int_x m^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 + \frac{\kappa}{\Lambda^2} (H^\dagger H)^3 + \dots$$

- しかし、 $\Lambda \sim M_{\text{pl}}$ のようにカットオフが十分に大きいなら、高次の項 ($(H^\dagger H)^3$ など) は無視できる。
- 一方、カットオフが低い場合は、高次項も寄与を与えるはず。
- この観点から、高次項の寄与の大きさを実験と比較して、新物理のスケール Λ を探る研究もある：Standard Model Effective Field Theory (SMEFT)

北原さんの講義を参照してください。

4次元場の量子論の連続極限

いまのところ非可換ゲージ理論だけが相互作用のある非自明な理論だろう

- **よくある質問**：格子場理論でスカラー場理論や湯川理論、QEDを計算しないのはなんでですか？
- **答え**： $D=4$ では、固定点としてガウス固定点しか見つかってない。その点で、relevantな相互作用結合定数は一つもない。ガウス固定点へと連続極限を取ると、全ての結合定数をガウス固定点に収束するような軌跡をとるが、その軌跡では相互作用が無くなって、自由場の理論（自明な理論）にしかならない。
- 非自明な理論にするにはランダウ・ポールは避けられない。そうすると高次元の演算子を無視する理由がない。低エネルギーでは結合定数が小さいとして無視できるが、そうであれば摂動論で十分。

ポルチンスキーの定理

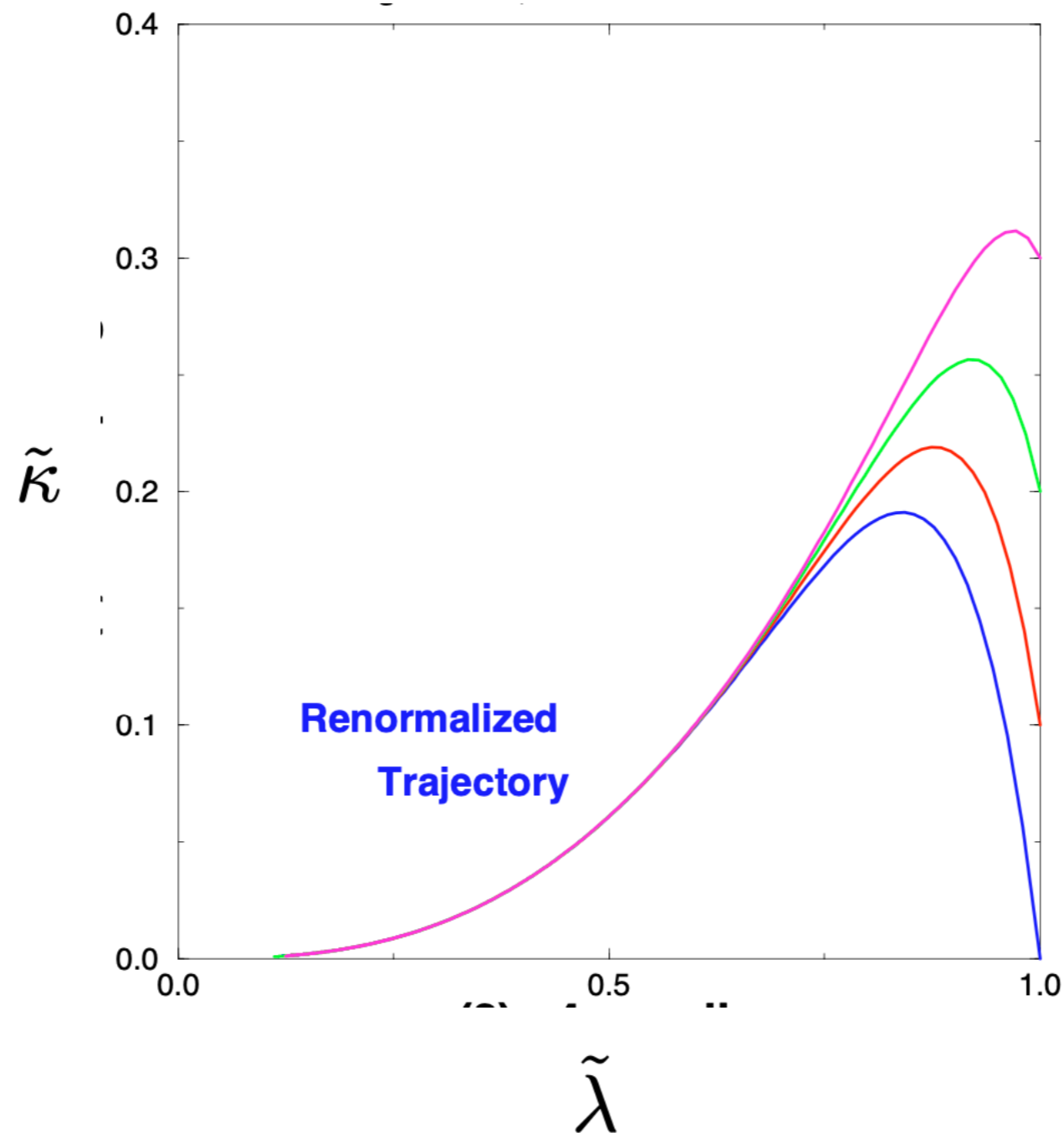
連続極限が取れない理論でくりこみ可能な理由

- D=4スカラー場を考えてみる
- 低エネルギーにいくと、ガウス固定点の周りで相互作用はすべてirrelevantであれば、それらは皆、ガウス固定点に吸い込まれていく。
- ガウス固定点への吸い込まれ方は、 $\tilde{g}_i \sim k^{-\theta_i}$ という冪となる。
- 次元の高い演算子 (ϕ^6 など) の結合定数は早くガウス固定点へといくが、 ϕ^4 は冪ではなく、 $\log k$ で吸い込まれていくので、他の演算子より遅くガウス固定点へと吸い込まれる。
- なので、低エネルギーでは次元の高い演算子は、 ϕ^4 の結合定数が走るくりこまれた軌跡へと収束していく。なので、低エネルギーでは ϕ^4 が支配してる。言い換えると理論空間のうち、 ϕ^4 の部分空間へと収束する。

ポルチンスキーの定理

連続極限が取れない理論でくりこみ可能な理由

$$\frac{\tilde{\kappa}}{k^2} \phi^6$$



K-I Aoki, [Int.J.Mod.Phys. B14, 1249 \(2000\)](#)

UVで任意の $\tilde{\kappa}$ の値を取っても、くりこまれた軌跡へと収束している

$$\tilde{\lambda} \phi^4$$

非自明な固定点がある理論の例

摂動的にはくりこみ不可能

- 3次元場の量子論
 - 非線形シグマ模型
 - Gross-Neuve模型
- 4次元場の量子論
 - (漸近的に安全な) 量子重力??
- 5次元場の量子論
 - (漸近的に安全な) Yang-Mills理論??

具体例：Yang-Mills理論

5次元のとき

- 全ての結合定数はガウス固定点でirrelevantなパラメータになる。
 - ゲージ結合定数 g_k^2 は質量次元 -1
- だけど、くりこみ群方程式を見ると $k\partial_k g_k^2 = g_k^2 - \frac{11}{8\pi^2} \tilde{g}_k^4$
- 非自明な固定点 $g_k^{*2} = \frac{8\pi^2}{11}$ が存在するように思える。
- **漸近的に安全なD=5Yang-Mills理論**：ガウス固定点で連続極限とると自明な理論にしかならないが、非自明な固定点周りで非自明な連続極限の5次元Yang-Mills理論を構成できるか？

この講義のまとめ

- **くりこみ群変換**
 - 粗視化：高エネルギーの揺らぎを順々に積分
 - 再規格化：変化したエネルギースケールとRedundant演算子を固定
- **連続極限の場の理論 = 臨界状態の統計力学系**
 - 固定点への極限
 - Relevantな演算子の数 = 自由パラメータの数
 - Relevantな演算子に相互作用が含まれる：非自明な理論が構成できる
 - Relevantな演算子が質量項だけ：自明な理論になる