群と表現

目次

1 はじめに

本講義では群とその表現につての入門的な内容を紹介する。なぜ、群と表現が必要かについて少し述べておこう。

素粒子論ではローレンツ対称性の表現、ゲージ理論など場の理論を考える上で重要な概念である。ローレンツ群 SO(1,3) の表現のスピノール表現によって、スピンの存在が導かれた。標準模型は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性に対するゲージ理論である。

中でも量子色力学 (QCD) は実際にカラーを内部自由度とする $SU(3)_C$ 対称性を持っている。このスクール

のテーマである格子場の理論の一つである格子 QCD においては、クォーク場は格子上の各点にある $SU(3)_C$ の基本表現の自由度で記述され、ゲージ場は格子点をつなぐリンクに $SU(3)_C$ 群の恒等表現に従う 3 行 3 列の行列の自由度で表される。

さらに QCD には、クォークの質量ゼロの極限では u, d, s という 3 つのクォークの右巻きと左巻き成分それぞれについてフレーバーを入れ替える $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 対称性がある。このうちの対角部分群 $SU(3)_V$ は massless QCD の真空においても保たれるので、中間子やバリオンなどハドロンの分類に有用である。また、QCD においては $SU(3)_L \times SU(3)_R$ カイラル対称性の自発的対称性の破れが起こるが、これらの現象はカイラル摂動論と呼ばれる有効作用を用いて記述される。この理論は南部ゴールドストーン粒子である π, K, η 中間子を記述するためにカイラル場と呼ばれる場 U を導入するが、この場は $SU(3)_L \times SU(3)_R$ の bi-fundamental 表現である。

また、標準模型を超える理論の一つである大統一理論は $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 などの群に対応するゲージ理論で記述される。これらの構成には群とその表現の知識が欠かせない。

そこで本講義では主に特殊ユニタリ群 $SU(2), SU(3)$ を主な例として群とその表現についての基本的な内容を紹介する。

参考文献島和久著「連続群とその表現」岩波書店

2　群とは

集合 G とその上の二項演算 $G \times G \to G$ が以下の 3 つの条件を満たすとき、集合 G と二項演算の組みが群であるという。以下、G の元 $g, h \in G$ についての二項演算を gh と書く。

1. (結合法則) G の任意の元 $g, h, k \in G$ に対して次を満たす: $(gh)k = g(hk)$
2. (単位元の存在) G の任意の要素 $g \in G$ に対して次を満たす G の元 e が存在する: $ge = eg = g$
3. (逆元の存在) G の任意の要素 $g \in G$ に対して次を満たす G の元 g^{-1} が存在する：$gg^{-1} = g^{-1}g = e$

2.1　一般線形群と特殊線形群

K を実数体 $\mathbf{R}$ または複素数体 $\mathbf{C}$ とする。ベクトル空間 K^n における一次変換は体 K を係数とする n 次正方行列と同一視できる。このような行列の全体を $M(n, \mathbf{K})$ と記す。$M(n, K)$ に属するすべての正則行列の作る集合 G を考えると、行列の掛け算を二項演算として、G とこの二項演算は群をなす。
これを K 上の n 次**一般線形群 (general linear group)** と呼び、$GL(n, K)$ と表す。

一般線形群の部分群として
$\{A \in M(n, K); \det A = 1\}$、すなわち行列式の値が 1 となるものの作る集合 G を考えると行列の掛け算のもとで群をなす。
これを K 上の n 次**特殊線形群 (special linear group)** と呼び、$SL(n, K)$ と表す。

2.2　古典群

物理でよく使われる古典群は上の一般線形群や特殊線形群の部分群として、K^n 上の双一次形式
$f : K^n \times K^n \to K$ を不変に保つ線形変換に限ったもので与えられる。詳しい説明は付録 A.1 に与えるとし

て、ここでは代表的な例を挙げる。

例 1: $U(n)$ 群、$SU(N)$ 群

- ユニタリ群 (unitary group) $U(N) = \{A \in M(N, \mathbf{C}); A^\dagger A = I_N\}$
- 特殊ユニタリ群 (special unitary group) $SU(N) = \{A \in M(N, \mathbf{C}); A^\dagger A = I_N, \mathrm{det}A = 1\}$

と定義される。

例 2: $O(N)$ 群、$SO(N)$ 群

- 直交群 (othorognal group) $O(N) = \{A \in M(N, \mathbf{R}); A^t A = I_N\}$
- 特殊群直交群 (special orthogonal group) $SO(N) = \{A \in M(N, \mathbf{R}); A^t A = I_N, \mathrm{det}A = 1\}$

と定義される。

例 3: ローレンツ群

行列 $I_{1,3}$ を $I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ として、

- $O(1,3)$ 群 (ローレンツ群) $O(1,3) = \{A \in M(4, \mathbf{R}); A^t A = I_{1,3}\}$

と定義される。

$SU(2)$ 群と $SO(3)$ 群に関する具体的な性質を付録 A.2 に述べる。

3 群の表現

3.1 群の表現の定義

G を位相群として、V を体 K 上のベクトル空間とする。G の元 x にベクトル空間 V から V への線形作用素 $\rho(x)$ が対応し、以下の条件を満たすとき (V, ρ) を G の**表現**という。

1. $\forall x, \forall y \in G, \rho(x)\rho(y) = \rho(xy), \rho(e) = I_V$
2. $x \in G, f \in V$ としたとき $\rho(x)f$ が x についても f についても連続

V を表現空間という。体 K が $\mathbf{C}$ のとき複素表現、$\mathbf{R}$ のとき実表現という。

3.2 群の表現に関連する用語

自明な表現 G のすべての元にベクトル空間 E 上の単位行列 I_E を対応させる写像を G の**自明な表現**という。
恒等表現 G を $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群とする。G の各元に自分自身を対応させる写像を G の**恒等表現**という。
随伴表現 $n \times n$ のトレースがゼロでエルミートな行列の空間

$$V = \{X \in M(n, \mathbf{C}); X + X^\dagger = 0 \ \& \ \mathrm{Tr}(X) = 0\} \tag{1}$$

に対して内積を $(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY^\dagger)$ で導入する。$h\in SU(n)$ に対し V から V への写像を

$$(Ad(h))X = hXh^{-1} \tag{2}$$

で定義すると $(Ad(h),V)$ は $SU(n)$ 群の表現になっている。これを $SU(n)$ の**随伴表現**という。

双対表現　表現 (ρ,V) が与えられたとき　V から $\mathbf{C}$ への線形写像全体のなすベクトル空間を $\bar{V}$ とする。

$$\bar{V} = Hom(V,\mathbf{C}) = f : V \to \mathbf{C}, \mathrm{linear} \tag{3}$$

このとき G の元 g に対し $\bar{V}$ から $\bar{V}$ への線形作用素 $\bar{\rho}(g)$ を $\forall f\in\bar{V}, \forall v\in V$ に対し

$$\left(\bar{\rho}(g)f\right)(v) := f\left(\rho(g^{-1})v\right) \tag{4}$$

となるように定義する。$(\bar{\rho},\bar{V})$ で与えられる表現を**双対表現（反傾表現）**という。
[*1]

複素共役表現　上の例で特に $\rho(g)$ がユニタリ行列で与えられるときを考えよう。$f^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \bar{V}$ に対して $\bar{\rho}$ は

$$\left(\bar{\rho}(g)f\right)^T = \left(f\rho(g^{-1})\right)^T = (\rho(g)^{-1})^T f^T = \rho(g)^* f^T \tag{5}$$

となる。したがって ρ がユニタリ表現のとき、その双対表現 $(\bar{\rho},\bar{V})$ に現れる行列 $\bar{\rho}$ は 各成分が元の行列 ρ の複素共役となる。これを**複素共役表現**という。

直和表現　群 G に対して 2 つの表現 $(\rho,V),(\rho',V')$ があるとする。この 2 つの表現の直話 $(V,\rho)\oplus(V',\rho') := (V\oplus V', \rho\oplus\rho')$ を定義しよう。$V\oplus V'$ の任意の元は適当な $v\in V$, $v'\in V'$ の直和 $v\oplus v'$ の線形結合で表されるので $v\oplus v'$ に対する表現行列が定まれば、線形性から任意の元に対しても定めたことになる。そこで $\rho\otimes\rho'$ は $V\oplus V'$ から自分自身への線形作用素で

$$\rho\oplus\rho'(g)v\otimes v' := \rho(g)v\oplus\rho'(g)v' \tag{6}$$

を満たすと定義すると、$(V\oplus V',\rho\oplus\rho')$ は G の表現となる。V これを**直和表現**という。

3.2.1　直積表現

群 G に対して 2 つの表現 $(\rho,V),(\rho',V')$ があるとする。この 2 つの表現の直積 $(V,\rho)\otimes(V',\rho') := (V\otimes V',\rho\otimes\rho')$ を定義しよう。$V\otimes V'$ の任意の元は適当な $v\in V$, $v'\in V'$ のテンソル積 $v\otimes v'$ の線形結合で表されるので $v\otimes v'$ に対する表現行列が定まれば、線形性から任意の元に対しても定めたことになる。そこで $\rho\otimes\rho'$ は $V\otimes V'$ から自分自身への線形作用素で

$$\rho\otimes\rho'(g)v\otimes v' := \rho(g)v\otimes\rho'(g)v' \tag{7}$$

を満たすと定義すると、$(V\otimes V',\rho\otimes\rho')$ は G の表現となる。V これを**直積表現**という。

[*1] $\forall v\in V$ を $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ と成分表示で表すとする。すると V から C への線形写像の全体の集合の任意の元 f を同じく成分表示で $(f_1,\cdots,f_n)=f$ と表せばよい。実際、$f(v)=f\cdot v$ によって、V から $\mathbf{C}$ の線形写像を作れることがわかる。

同値な表現　同じ次元の 2 つの表現 $\rho_1, \rho_2 \in GL(n;K)$ が全ての $g \in G$ に対して一つの行列 $T \in GL(n;K)$ が存在して $\rho_1(g) = T\rho_2(g)T^{-1}$ と書けるとき，ρ_1, ρ_2 を同値な表現と呼ぶ.

既約表現　表現 (ρ, V) について不変部分空間が $\{0\}$,V 以外にないものをいう。V の不変部分空間 W とは

$$\forall \in G, \forall w \in W \Rightarrow \rho(g)w \in W \tag{8}$$

となるもの、つまりベクトル空間の W の任意のベクトルに群 G の任意の要素に対する表現行列をかけても W の中に留まるような W のことである。ここでは省略するが任意のユニタリ表現は既約表現の直和表現に分解できることが知られている。既約分解とは表現を既約表現の直和に分解することである。.

標準模型で現れる $SU(2)$, $SU(3)$ ゲージ対称性やアップ、ダウン、ストレンジクォークの近似的 $SU(3)$ フレーバー対称性を議論する上では恒等表現、随伴表現、複素共役表現、直積表現とその既約分解にによって必要な表現はカバーできるといっても過言ではない。ただし、直積表現の既約分解や Clebsh-Gordan 係数は何かなどの技術的問題や、全ての有限次元の既約表現を尽くすにはどうすれば良いか、古典線形群以外の例外群がどんなものか、などより数学的な問題に答えるには後で述べるリー代数とその表現による理解が極めて有効である。

少しテクニカルな内容になるが $SU(2)$ 群の表現を付録 A.3 に与える。

3.3　不変積分

群 G 上の複素数値をとる連続関数を $C_0(G)$ と表す。f を群 G 上で定義された複素数値関数とし、群の任意の固定元を $a \in G$ とする。このとき、関数 $g \mapsto f(ag)$ を h による f の左移動といい、f_a と記す。また、関数 $g \mapsto f(ga)$ を h による f の右移動といい、f^a と記す。汎関数 I を $C_0(G)$ 上の正定値線形汎関数とする。I が条件

1. $\forall f \in C_0(G),\ f \neq 0 \implies I(f) > 0$
2. $\forall f \in C_0(G),\ \forall a \in G \implies I(f_a) = I(f)$

を満たすとき、I を**左不変積分**という。条件 2 の代わりに $I(f^a) = I(f)$ が成り立つとき**右不変積分**という。不変積分のことを**Haar 積分**ともいう。不変積分は具体的な積分測度 $d\mu(g)$ を用いて

$$I(f) = \int d\mu(g) f(g) \tag{9}$$

と表せる。$d\mu(g)$ を**不変測度**または**Haar 測度**という。Haar 測度の例を付録 A.4 で与える。

3.4　Schur の補題

Schur の補題

1. $\rho_i\ (i = 1, 2)$ を V_i を表現空間に持つ G の n_i 次元既約表現であるとする。M が V_1 から V_2 への線型写像で、全ての $g \in G$ に対して

$$M\rho_1(g) = \rho_2(g)M \tag{10}$$

が成り立つとする。このとき M は同型写像かまたは $M = 0$ である。

2. (ρ, V) を群 G の既約表現とする。M を V から V への線形写像で任意の元 $g \in G$ に対して

$$M\rho(g) = \rho(g)M \tag{11}$$

が成り立つとすると M は単位行列に比例する。

補題 1 の証明

M の核 $\mathrm{Ker}M \subset V_1$ と M の像 $\mathrm{Im}M \subset V_2$ を $\mathrm{Ker}M = \{v \in V_1 | Mv = 0\}, \mathrm{Im}M = \{Mv \in V_2 | v \in V_1\}$ とおく。

1. M の核の任意の元 $v \in \mathrm{Ker}G$ は群 G の任意の元 $g \in G$ に対し、

$$M\rho_1(g)v = \rho_2(g)Mv = 0 \tag{12}$$

が成り立つので $\mathrm{Ker}M$ は群 G の作用で $\mathrm{Ker}M$ にとどまる。すなわち不変部分空間である。既約表現では不変部分空間はそれ自身か 0 のみなので $\mathrm{Ker}M = 0$ または $\mathrm{Ker}M = V_1$ である。

2. M の像の任意の元 $Mv \in \mathrm{Im}M$ は群 G の任意の元 $g \in G$ に対し、

$$\rho_2(g)(Mv) = M(\rho_1(g)v) \tag{13}$$

が成り立つので、$\mathrm{Im}M$ は群 G の作用で $\mathrm{Im}M$ にとどまる。すなわち不変部分空間である。既約表現の定義から不変部分空間はそれ自身か 0 のみなので $\mathrm{Im}M = 0$ または $\mathrm{Im}M = V_2$ である。

この 2 つを考慮すると、まず $\mathrm{Ker}M = 0$ のとき $\mathrm{Im}M$ はゼロになれないので $\mathrm{Im}M = V_2$ しかない。これは M が単射かつ全射なので同型写像である。次に $\mathrm{Ker}M = V_1$ のとき $M = 0$ である。

補題 2 の証明

M の固有ベクトル v をとる。その固有値を λ とする。$(M - \lambda I)v = 0$ である。このとき G の任意元 $g \in G$ に対して

$$(M - \lambda I)\rho(g) = \rho(g)(M - \lambda I) \tag{14}$$

が成り立つが、$M - \lambda I$ は $\mathrm{Ker}(M - \lambda I)$ の元として少なくとも v は持つので $\mathrm{Ker}(M - \lambda I)$ はゼロでない。従ってすでに証明したこの補題 1 より $\mathrm{Ker}(M - \lambda I) = V$ となる。すなわち V 上では $M = \lambda I$ となり単位行列に比例する。

既約表現の直交性

群 G の既約表現全体の集合 $\{\rho^{(\alpha)}\}$ を考える。

$$\sum_{g \in G} \rho_{ij}^{(\alpha)}(g^{-1})\rho_{kl}^{(\beta)}(g) = \frac{|G|}{d_\alpha}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{\alpha\beta} \tag{15}$$

が成り立つ。ただし、d_α は表現 $\rho^{(\alpha)}$ の表現空間の次元で、$|G| = \sum_{g \in G}$ すなわち群の位数である。*2

*2 ここで群 G が連続群の場合は $\sum_{g \in G}$ の代わりに Haar 積分 $\int d\mu(g)$ を用いる。このとき $|G| = \int d\mu(g)$ すなわち群空間の体積である。

証明： $\rho^{(\alpha)}, \rho^{(\beta)}$ の表現空間を $V^{(\alpha)}, V^{(\beta)}$ とし、B を $V^{(\alpha)}$ から $V^{(\beta)}$ への線形写像とする。ここで $M = \sum_{g\in G} \rho^{(\alpha)}(g^{-1}) B \rho^{(\beta)}_{kl}(g)$ とおくと

$$\begin{aligned} \rho^{(\alpha))}(g) M &= \rho^{(\alpha)}(g) \sum_{g'\in G} \rho^{(\alpha)}(g'^{-1}) B \rho^{(\beta)}_{kl}(g') \\ &= \sum_{g'\in G} \rho^{(\alpha)}(gg'^{-1}) B \rho^{(\beta)}_{kl}(g' g^{-1}) \rho^{(\beta)}(g) \\ &= M \rho^{(\beta)}(g) \end{aligned} \tag{16}$$

が成り立つので、$\alpha \neq \beta$ のときは Schur の補題の 1 より $M = 0$ である。$\alpha = \beta$ の時には Shur の補題の 2 より $M = \lambda I$ となる。λ は B に依存する定数である。ここで $B_{rs} = \delta_{rj}\delta_{sk}$ ととると

$$\begin{aligned} M_{il} &= \sum_{g\in G} \rho^{(\alpha)}_{ir}(g^{-1}) B_{rs} \rho^{(\alpha)}_{sl}(g) \\ &= \sum_{g\in G} \rho^{(\alpha)}_{ij}(g^{-1}) \rho^{(\alpha)}_{kl}(g) = \lambda_{jk}\delta_{il} \end{aligned} \tag{17}$$

定数 λ_{jk} を求めるため、最後の両辺で $i = l$ とおいて i について話をとると λ_{jk} は

$$\lambda_{jk} d_\alpha = \sum_{g\in G} \underbrace{\rho^{(\alpha)}_{kj}(\underbrace{gg^{-1}}_{=e})}_{=\delta_{kj}} = |G|\delta_{jk} \tag{18}$$

と定まる。これによって、既約表現の直交性の式が証明できた。

既約表現の直行性の応用

$SU(N)$ の N 次元表現 $(\rho, \mathbf{C}^N)$ を考える。任意の元 $g \in G$ に対する表現行列を $U = \rho(g)$ と表すことにする。U_{ij} は $N \times N$ の特殊ユニタリ行列である。また Haar 測度を $d\mu(g) = dU$ と表すことにする。

$$\int d\mu(g) \rho(g^{-1}) ij \rho(g)_{kl} = \int dU U^\dagger_{ij} U*_{kl} = \frac{1}{N}\left(\int dU\right) \delta_{il}\delta_{kl} \tag{19}$$

が得られる。ここで Haar 積分を $\int dU = 1$ となるように規格化すると

$$\int dU U^\dagger_{ij} U_{kl} = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{kl} \tag{20}$$

という式が得られる。

3.5 指標

群 G の元 $g \in G$ の表現 ρ に対しての指標 $\chi(g)$ は

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) \tag{21}$$

で定義される。

- ρ, ρ' が同値のとき $(\rho'(g) = T\rho(g)T^{-1})$ の指標は等しい

- g, g' が共役のとき (i.e. $\exists h \in G, g' = hgh^{-1}$), 指標は等しい ($\chi(g) = \chi(g')$)。
- 直和表現 ($\rho^{(\alpha)} \oplus \rho^{(\beta)}$) の指標は $\chi(\rho^{(\alpha)} \oplus \rho^{(\beta)}) = \chi(\rho^{(\alpha)}) + \chi(\rho^{(\beta)})$ である。
- 直積表現 ($\rho^{(\alpha)} \otimes \rho^{(\beta)}$) の指標は $\chi(\rho^{(\alpha)} \otimes \rho^{(\beta)}) = \chi(\rho^{(\alpha)})\chi(\rho^{(\beta)})$ である。

<u>指標の直交性</u>ユニタリ既約表現 $\rho^{(\alpha)}, \rho^{(\beta)}$ の指標を $\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}$ とすると

$$\sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)*}(g)\chi^{(\beta)}(g) = |G|\delta_{\alpha\beta} \tag{22}$$

が成り立つ。

証明　既約表現の直交性の式で $i = j,\ k = l$ とおいて和を取れば良い。

指標の直交性の応用 2

表現 $\rho(g)$ が $\rho(g) = \oplus_\alpha q_\alpha \rho^{(\alpha)}$ と既約表現に直和分解できるとする。このとき係数 q_α は以下で求められる。

$$q_\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)*} \chi(g) \tag{23}$$

指標の直交性の応用 1

$SU(N)$ の N 次元表現 $(\rho, \mathbf{C}^N)$ を考える。任意の元 $g \in G$ に対する表現行列を $U = \rho(g)$ と表すことにする。U_{ij} は $N \times N$ の特殊ユニタリ行列である。また Haar 測度を $d\mu(g) = dU$ と表すことにする。F を $\mathrm{tr}U$ または $\mathrm{tr}(U^\dagger)$ のテイラー展開可能な関数とする。各項は $\mathrm{tr}U$ や $\mathrm{tr}U^\dagger$ の積を使ってかけるので、その各項は直積表現を含む何らかの表現の指標の和と見なせる。このことから

$$F(\mathrm{tr}U, \mathrm{tr}U^\dagger) = \sum_R d_R \lambda_R \chi_R(U) \tag{24}$$

と既約表現の指標の和でかける。指標の直交性を使うとその係数は

$$d_R \lambda_R = \int dU F(\mathrm{tr}U, \mathrm{tr}U^\dagger) \chi_R^*(U) \tag{25}$$

で与えられる。

4　線形リー群とリー代数

線形リー代数（古典線形群は全て含まれる）の局所構造を決定するものとして、リー代数を導入する。これは線形化された対象なので取り扱いが容易になる。線形リー群の表現を求める問題はリー代数の表現を求める問題に帰着されることを示す。付録で、実リー代数の複素化の概念を導入し、実リー代数の全ての複素表現を求める問題は、そのリー代数の複素化の全ての複素表現を求めることに帰着されることも示す。

4.1　線形リー群とリー代数の定義と性質

$GL(n, \mathbf{C})$ の閉部分群を<u>**線形リー群**</u>という。$G(n, \mathbf{C}), G(n, \mathbf{R})$ は線形リー群である。古典線形群はすべてリー群である。

G を線形リー群とするとき、全ての実数 t に対して

$$\exp(tX) \in G \tag{26}$$

を満たす行列 $X \in M(n, \mathbf{C})$ の全体を G の**リー代数**という。

例　群 $GL(n,K)$ のリー代数 $\mathfrak{gl}(n,K) = M(n,K)$

例　群 $SL(n,K)$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(n,K) = \{X \in M(n,K); \mathrm{Tr}(X) = 0\}$

例　群 $U(n)$ のリー代数 $\mathfrak{u}(n) = \left\{X \in M(n,\mathbf{C}); X^\dagger + X = 0\right\}$

例　群 $SU(n)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(n) = \left\{X \in M(n,\mathbf{C}); X^\dagger + X = 0, \mathrm{Tr}(X) = 0\right\}$

線形リー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ は以下を満たすことが証明できる。

1. $a \in \mathbf{R}, X \in \mathfrak{g}$ ならば $aX \in \mathfrak{g}$ である。
2. $X, Y \in \mathfrak{g}$ ならば $X + Y \in \mathfrak{g}$ である。[*3]
3. $X, Y \in \mathfrak{g}$ ならば、$[X,Y] \in \mathfrak{g}$ である。[*4]

ここで

$$[X,Y] = XY - YX \tag{27}$$

である。性質 1, 2 よりリー代数 $\mathfrak{g}$ は実ベクトル空間である。また性質 3 より、算法 $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ が $\mathfrak{g}$ の中で閉じている。そしてその算法は

1. 冪零性　$[X,X] = 0$
2. 双線形性 $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$
   $[X, aY + bZ] = a[X,Z] + b[X,Z] \quad (a, b \in \mathbf{R}, X, Y, Z \in \mathfrak{g})$
3. ヤコビ恒等式　$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

という性質を持っている。

4.2 抽象リー代数

上で定義された線形リー群のリー代数を抽象化して以下の**抽象リー代数**を定義する。

$\mathfrak{g}$ を K 上のベクトル空間とする。$\mathfrak{g}$ の中で閉じている算法 $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ が次の 3 つの性質を持つとき $\mathfrak{g}$ を K 上のリー代数という。$[X,Y]$ を**交換積**と呼ぶ。

1. 冪零性　$[X,X] = 0$
2. 双線形性 $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$
   $[X, aY + bZ] = a[X,Z] + b[X,Z]$ [*5]
3. ヤコビ恒等式　$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

ここで $a, b \in K, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ である。$K = \mathbf{R}$ のとき実リー代数、$K = \mathbf{C}$ のとき複素リー代数という。古典線形群のリー代数は全て実リー代数である。$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}), \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ は複素リー代数でもある。

[*3] 2 つ目の性質は $\exp(t(X+Y)) = \lim_{m\to 0} \left\{\exp(\frac{tX}{m})\exp(\frac{tY}{m})\right\}^m$ であり、1 つ目の性質と群 G が閉集合であることから示せる。

[*4] 3 つ目の性質は群の元 $g = \exp(tX), h = \exp(tY) \in G$ に対し Baker-Campbell-Haussdorf 公式を用いると $G \ni ghg^{-1}h^{-1} = \exp(t^2[X,Y] + O(t^3))$ となることから示せる。

[*5] これより $[Y,X] = -[X,Y]$ も導かれる

4.3 線形リー代数の表現

V を K 上の n 次元ベクトル空間とする。V における線形一次変換全体が作る群を $GL(V)$ とする。
$\mathfrak{g}$ を K 上のリー代数とする。$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型写像 ρ が

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y) \quad (\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}) \tag{28}$$
$$\rho(aX) \ = a\rho(X) \quad (\forall a \in \mathcal{K}, \forall X \in \mathfrak{g}) \tag{29}$$
$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \quad (\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}) \tag{30}$$

を満たすとき (ρ, V) を g の V 上の表現という。以下が成り立つ。n は ρ を字数、V を ρ の表現空間という。

リー代数の基底を $T_a \quad (a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{g})$ とする。任意の元 $X \in \mathfrak{g}$ は $X = \sum_a X^a T^a$ とかける。するとリー代数が $[,]$ で閉じていることから

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c \tag{31}$$

とかける。$f_{ab}{}^c$ を群の**構造定数**と呼ぶ。ヤコビ恒等式

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0 \tag{32}$$

より

$$f_{bc}{}^d f_{ad}{}^e + f_{ca}{}^d f_{bd}{}^e + f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = 0 \tag{33}$$

が成り立つので $ad(T_a)_b{}^c = -f_{ab}{}^c = f_{ba}{}^c$ とおくと

$$[ad(T_a), ad(T_b)] = f_{ab}{}^c ad(T_c) \tag{34}$$

を満たし、構造定数を用いて表現が構成できる。これを**随伴表現 (adjoint representation)**という。

4.4 $\mathfrak{su}(2)$ の表現

ここでは素朴にエルミート演算子や † た量子力学の角運動量の表現の説明を行う。前章までは数学の記法にならって $\mathfrak{su}(2)$ の元は $X^\dagger + X = 0, \ X \in M(2, \mathbf{C})$ を満たすもの全体であったが、ここでは、量子力学にならって $X = iY$ と置き直し Y をエルミート行列とする記法で話を進める*6。また抽象リー代数や表現行列を特に区別せず、演算子として扱う。

$\mathfrak{su}(2)$ リー代数は演算子 $J_a = 1, 2, 3$ を用いて、交換関係

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \tag{35}$$

を満たす。

$$J^\pm = (J_1 \pm iJ_2)/\sqrt{2}, \qquad (J^\pm)^\dagger = J^\mp \tag{36}$$

*6 この解析は、数学的には実リー代数である $\mathfrak{su}(2)$ に対して、複素化を用いて複素リー代数 $\mathfrak{sl}(2)$ を定義したのち、実構造によって $\mathfrak{su}(2)$ リー代数の表現を構成することに対応する。複素化したリー代数と元の実リー代数の表現との関係については付録 A.5 に説明する。また $\mathfrak{sl}(2)$ の表現については付録 A.6 に解説する。

とおくと交換関係は

$$\left[J_3, J^{\pm}\right] = \pm J^{\pm} \tag{37}$$
$$\left[J^{+}, J^{-}\right] = J_3 \tag{38}$$

となる。これより J_3 の固有値を $J^{\pm}$ が 1 だけ上げ下げすることがわかる。$J^2 = J_1^2 + J_3^2 + J_3^2 = J_3^2 + J^+J^- + J^-J^+$ とおくと

$$[J_3, J^2] = 0 \tag{39}$$

となるので、J^2 と J_3 は同時対角化できる。有限次元表現では J_3 の固有値が最大になり、それ以上 J^- で固有値を増やすことができない状態が存在する。その固有値を j とし、状態を $|j,j\rangle$ と書くことにする。

$$J^+|j,j\rangle = 0 \tag{40}$$
$$J_3|j,j\rangle = j|j,j\rangle \tag{41}$$
$$J^2|j,j\rangle = j(j+1)|j,j\rangle \tag{42}$$

が成り立つ。ここで最後の式は $J^2 = J_3^2 + [J^+, J^-] + 2J^-J^+ = J_3^2 + J_3 + 2J^-J^+$ を用いた。状態 $|j,j\rangle$ に J^- をかけていくと、J^2 の固有値は変わらないまま、J_3 の固有値が 1 ずつ下がっていく。今 J_3 の固有値が m である状態を $|j,m\rangle$ とする。状態のノルムを 1 に規格化しておくことにする。$J^-|j,m\rangle$ は $|j,m-1\rangle$ に比例するので、

$$J^-|j,m\rangle = N_{j,m}|j,m-1\rangle \tag{43}$$

と表せる。両辺のノルムをとると

$$|N_{j,m}|^2 = \langle j,m|J^+J^-|j,m\rangle = \langle j,m|J^2)|j,m\rangle \tag{44}$$

となる。ここで

$$J^2 = J_3^2 + J^+J^- + J^-J^+ = J_3^2 + 2J^+J^- + \left[J^-, J^+\right] = J_3^2 - J_3 + 2J^+J^- \tag{45}$$

より

$$J^+J^- = \frac{1}{2}\left(J^2 - J_3^2 + J_3\right) \tag{46}$$

を代入すると

$$|N_{j,m}|^2 = \sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)} \tag{47}$$

を得る。J^- を k 回かけた状態の J_3 の固有値は $m = j-k$ なのでこのとき

$$|N_{j,j-k}|^2 = \sqrt{\frac{1}{2}(2j-k)(k+1)} \tag{48}$$

有限次元表現であるためには、J^- をかけていったとき、どこかでノルムがゼロとなる必要があるので、必ずある整数 k が存在して

$$j = \frac{k}{2} \tag{49}$$

となる。まとめると、任意の整数を k として、$j=\frac{k}{2}$ の場合

$$|k/2,k/2\rangle,\quad |k/2,k/2-1\rangle,\quad \cdots,\quad |k/2,-k/2+1\rangle,\quad |k/2,-k/2\rangle \tag{50}$$

の $k+1$ 個の状態で張られる有限の表現空間となる。すなわち $k+1$ 次元表現が得られる。これが物理では「角運動量は整数か半整数の値をとる」と表現される。

J_3 の固有値は**重み (weight)**と呼ばれ、j は**最高の重み (highest weight)**と呼ばれる。

$j=5/2$ の時 (6 次元表現）の表現空間での E,F の作用を図 (1) に示す。

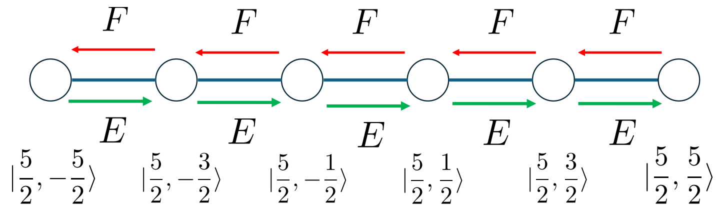

図 1　j=5/2 の場合の $\mathfrak{su}(2)$ リー代数の表現空間

4.5　$\mathfrak{su}(3)$ の表現

$\mathfrak{su}(3)$ はもともとは 3 行 3 列のトレースがゼロでエルミートな行列のなす代数である。基底はゲルマン行列

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}, \tag{53}$$

として $T_a=\frac{1}{2}\lambda_a$ とおいたもので得られる。ここで

$$\mathrm{tr}(T_aT_b)=\frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{54}$$

と規格化されている。いま、同時対角化できる生成子は

$$H_1=T_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H_2=T_8=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}, \tag{55}$$

である。これらに対する固有値を上げ 下げする生成子を $\mathfrak{su}(2)$ にならってとろう。

$$E_{\pm\vec{\alpha}_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1\pm iT_2),\quad E_{\pm\vec{\alpha}_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_4\pm iT_5),\quad E_{\pm\vec{\alpha}_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_6\pm iT_7) \tag{56}$$

行列でかくと

$$
\begin{aligned}
E_{\vec{\alpha}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{-\vec{\alpha}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
E_{\vec{\alpha}_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{-\vec{\alpha}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
E_{\vec{\alpha}_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} E_{-\vec{\alpha}_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{57}
$$

すると、交換関係は

$$
[H_i, E_{\pm\vec{\alpha}_a}] = \pm(\vec{\alpha}_a)^i E_{\pm\vec{\alpha}_a} \tag{58}
$$

$$
[E_{\vec{\alpha}_a}, E_{-\vec{\alpha}_a}] = (\vec{\alpha}_a)^i H_i \tag{59}
$$

とまとめられる。ただし、ベクトル $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ は

$$
\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},\ \ \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{60}
$$

という単位ベクトルで与えられる。式 (58) は生成子が、$H_i\ (i = 1, 2)$ の作用に対して「固有値」を与えると解釈できる。この固有値の集合を**ルート系 (root system)**と呼び、$\pm\vec{\alpha}_i\ (i = 1, 2, 3)$ を**ルートベクトル (root vector)**と呼ぶ。$\mathfrak{su}(2)$ のときはカルタン部分代数が 1 次元だったので、ルートベクトルは 1 次元ベクトルだったが、$\mathfrak{su}(3)$ のときはカルタン部分代数が 2 次元なのでルートベクトルは 2 次元ベクトルである。ルートベクトルの様子を図 2 に示す。このように式 (58) と式 (59) が同じ $\vec{\alpha}_a$ を使ってまとま

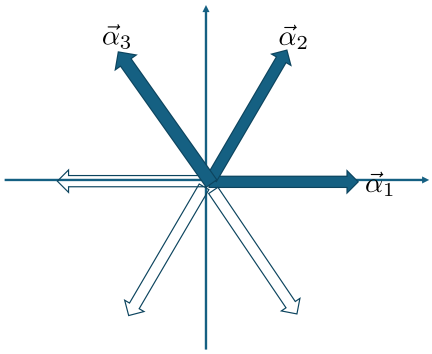

図 2　$\mathfrak{su}(3)$ リー代数のルート系

るのはたまたまではなく、理由があることを付録 A.7 で議論する。

この生成子 $H_i\ (i = 1, 2), E_{\pm\vec{\alpha}_i}\ (i = 1, 2, 3)$ で与えられる代数を抽象リー代数に格上げしたものが $\mathfrak{su}(3)$ リー代数である。抽象リー代数に対して改めてベクトル空間 V 上の表現 ρ を考えることで 3 行 3 列の行列に限らない表現行列が現れる。

4.5.1 $\mathfrak{su}(3)$ の基本表現

そもそもの $\mathfrak{su}(3)$ リー代数の出発点となった代数は 3 次元ベクトル空間に作用する 3 行 3 列の行列 $H_i\ (i=1,2), E_{\pm\vec{\alpha}_i}(i=1,2,3)$ であった。従って、恒等表現を取れば 3 次元のベクトル空間が表現空間 V となる。その基底を

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

としよう。これにカルタン部分代数に対応する行列 H_1, H_2 を作用すると

$$H_1\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1,\quad H_2\vec{e}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{e}_1,\quad H_1\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_2,\quad H_2\vec{e}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{e}_2,\quad H_1\vec{e}_3 = 0,\quad H_3\vec{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \tag{62}$$

となる。これをまとめると

$$H_i\vec{e}_a = (\vec{w}_a)^i\vec{e}_a \quad (i=1,2,\ a=1,2,3) \tag{63}$$

となる。ここでベクトル $\vec{w}_a$ は

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},\quad \vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},\quad \vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

という長さが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ のベクトルである。これを 3 次元表現の**重みベクトル (weight vector)** という。一般に、カルタン代数の固有状態を v としその固有値（重み）ベクトルを $\vec{w}$ とすると交換関係の式 (58) より $E_{\pm\vec{\alpha}_a}v$ の重みベクトルは、v の重みベクトル $\vec{w}$ から $\vec{w}\pm\vec{\alpha}_a$ へと変化する。すなわち

$$H_i\left(E_{\pm\vec{\alpha}_a}v\right) = (\vec{w}\pm\vec{\alpha}_a)^i\left(E_{\pm\vec{\alpha}_a}v\right) \tag{65}$$

となる。重みベクトルの様子および重みベクトルとルートベクトルとの関係を図 3 に示す。

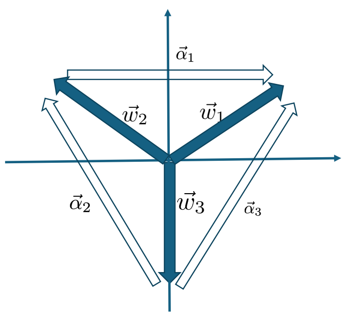

図 3 $\mathfrak{su}(3)$ の基本表現の重みベクトル

確認するまでもなく、恒等表現のもともとの定義から 3 次元ベクトル空間は $\mathfrak{su}(3)$ の 3 次元表現の行列の作用に対して閉じているがそれがどういう意味で閉じているかをもう少し見てみよう。例えば、重み $\vec{w}_1$ を持つ表現空間の状態は $\vec{e}_1$ であるが、これに $E_{-\vec{\alpha}_1}$ をかけると、式 (57), 式 (61) を代入した計算により

$$E_{-\vec{\alpha}_1}\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \tag{66}$$

となり、確かに重み $\vec{w}_1 - \vec{\alpha}_1 = \vec{w}_2$ を持つ状態に移っており (65) と矛盾がない。

さらに H_a $(a = 1, 2, 3)$ を

$$H_a = \sum_{i=1,2} (\vec{\alpha}_a)^i H_i \tag{67}$$

と定義する。これは直感的には 2 次元のカルタン部分代数を $\vec{\alpha}_a$ 平行な 1 次元方向に射影したものである。式 (58)、式 (59) 用いると ($\vec{\alpha}_a \cdot \vec{\alpha}_a = 1$ であることを用いて)

$$[H_a, E_{\pm\vec{\alpha}_a}] = \pm E_{\pm\vec{\alpha}_a} \tag{68}$$

$$[E_{\vec{\alpha}_a}, E_{-\vec{\alpha}_a}] = H_a \tag{69}$$

これは生成子 H_a,$E_{\pm\vec{\alpha}_a}$ を $\mathfrak{su}(3)$ の生成子 $J_3, J_\pm$ と対応させれば、式 (37),(38) と全く同じ交換関係を与えることがわかる。

そこで 3 次元表現について H_a の基底ベクトルへの作用を見るため式 (63) の両辺とベクトル $\vec{w}_a$ の内積をとると

$$H_a \vec{e}_b = (\vec{\alpha}_a \cdot \vec{w}_b) \vec{e}_b \quad (a = 1, 2, 3, b = 1, 2, 3) \tag{70}$$

となる。ここで a はルートベクトルの種類を表すラベルで、b は 3 次元表現の基底を表すラベルである。たまたまともに 1 から 3 まで走るが、意味は異なる。また、カルタン部分代数は 2 個の基底で張られており H_a で独立なものは 2 つであることにも注意しよう。ベクトルの内積 $(\vec{\alpha}_a \cdot \vec{w}_b)$ の値をルートベクトルと重みベクトルの定義から計算してみると

$$\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}_1 = \frac{1}{2}, \quad \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}_2 = -\frac{1}{2}, \quad \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}_3 = 0 \tag{71}$$

$$\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{w}_1 = \frac{1}{2}, \quad \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{w}_2 = 0, \quad \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}_3 = -\frac{1}{2} \tag{72}$$

$$\vec{\alpha}_3 \cdot \vec{w}_1 = 0, \quad \vec{\alpha}_3 \cdot \vec{w}_3 = \frac{1}{2}, \quad \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}_3 = -\frac{1}{2} \tag{73}$$

例えば、式 (71) と式 (70) を合わせると、$\mathfrak{su}(3)$ リー代数のうち、$H_1, E_{\pm\vec{\alpha}_1}$ で構成される $\mathfrak{su}(2)$ 部分リー代数について $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ が角運動量 $j = 1/2$ すなわち 2 次元の表現空間を与えるため $E_{\pm\vec{\alpha}_1}$ を一回かけたところまでで、2 回以上かけるとゼロとなる、$\vec{e}_3$ が角運動量 $j = 0$ すなわち 1 次元の表現空間を与えるため $E_{\pm\vec{\alpha}_1}$ をかけるとゼロとなる、と解釈できる。(他の方向についても同様である。) このことから、より一般に $\mathfrak{su}(3)$ の 3 次元表現において状態に生成子をかける作用を繰り返すとどこかでゼロとなり閉じているのは、$\mathfrak{su}(2)$ の表現論から理解できると期待できる。

4.5.2 $\mathfrak{su}(3)$ の随伴表現

随伴表現は表現空間が生成子 T_a $(a = 1, \cdots, 8)$ 自身の張るベクトル空間で、一方で生成子 T_a の表現行列は $ad(T_a)$ で与えられる。表現空間の基底ベクトルである生成子 T_a を $|T_a\rangle$ とかくことにするベクトルとみなすため ad の行列表示は生成子の交換系で与えられる生成子そのものであるから、

$$ad(T_a)|T_b\rangle = \sum_c f_{ab}{}^c |T_c\rangle \tag{74}$$

と表せる。そこで、基底を H_i $(i = 1, 2), E_{\pm\vec{\alpha}_a}$ $(a = 1, 2, 3)$ 取り直すと $[H_i, H_j] = 0$ から

$$ad(H_i)|H_j\rangle = 0 \ (i = 1, 2), (j = 1, 2) \tag{75}$$

が得られ、式 (58) から

$$ad(H_i)|E_{\pm\vec{\alpha}_a}\rangle = \pm(\vec{\alpha})^i|E_{\pm\vec{\alpha}_a}\rangle \tag{76}$$

が得られる。すなわち表現空間の基底ベクトルとしての各生成子がカルタン代数の随伴行列の固有ベクトルになっている。従って、8 個の生成子 (固有状態) に対する H_i $(i=1,2)$ の固有値 (のベクトル) が重みベクトルとなる。

$$\vec{w}(|H_i\rangle) = 0 \ (i=1,2) \tag{77}$$

$$\vec{w}(|E_{\pm\vec{\alpha}_a}\rangle) = \pm\vec{\alpha}_a \ (a=1,2,3) \tag{78}$$

基本表現のときと同じように $\mathfrak{su}(2)$ 部分代数で考え直してみると $\vec{\alpha}_1$ 方向に射影した部分代数 $E_{\vec{\alpha}_1}, E_{-\vec{\alpha}_1}, H_{\vec{\alpha}_1}$ を考える。$H_{\vec{\alpha}_1}$ の固有値は

$$|H_1\rangle : 0 \tag{79}$$

$$|H_2\rangle : 0 \tag{80}$$

$$|E_{\pm\vec{\alpha}_1}\rangle : \pm\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1 = \pm 1 \tag{81}$$

$$|E_{\pm\vec{\alpha}_2}\rangle : \pm\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2 = \pm 1/2 \tag{82}$$

$$|E_{\pm\vec{\alpha}_3}\rangle : \pm\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_3 = \mp 1/2 \tag{83}$$

となる。$E_{\pm\vec{\alpha}_1}$ の作用が重みベクトルを $\pm\vec{\alpha}_1$ だけずらすことに注意すると基本表現のときと同様に $\mathfrak{su}(2)$ リー代数の表現に分解できることがわかる。

付録 A　Appendix

A.1　様々な古典群

物理でよく使われる古典群は上の一般線形群や特殊線形群の部分群として、K^n 上の双一次形式 $f : K^n \times K^n \to K$ を不変に保つ線形変換に限ったもので与えられる。より正確には双一次形式が非退化 (任意の y に対して $(x,y)=0 \Longrightarrow x=0$) のとき、集合

$$\{A \in M(n,K); \forall x, \forall y \in K^n, f(Ax,Ay) = f(x,y)\}$$

は行列の掛け算のもとで群をなす。どのような双一次形式を選ぶかでいろいろなバリエーションが生まれる。K^n の任意の 2 つの元

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{84}$$

に対し、双一次形式を

$$f(x,y) = x^t P y \tag{85}$$

で与える。また、$K=C$ のときには上に加えて

$$f(x,y) = x^\dagger Q y \tag{86}$$

で与えられる双一次形式も導入する。ここで $x^t = (x_1, \cdots, x_n)$, $x^\dagger = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ であり、P, Q はそれぞれの古典群ごとに具体的に与えられる対称または非対称な $n \times n$ 行列である。以下、具体例を挙げていこう。

1. $P = I_n$ のとき (I_n は $n \times n$ の単位行列)

   $K = \mathbf{C}$ ならば $O(n,\mathbf{C}) = \{A \in M(n,\mathbf{C}); A^t A = I_n\}$　複素直交群 (complex orthogonal group)
   $K = \mathbf{R}$ ならば　$O(n) = \{A \in M(n,\mathbf{R}); A^t A = I_n\}$　実直交群 (real orthogonal group)

2. $K = \mathbf{R}$ かつ $P = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ のとき (ただし $p+q=n$)

   $Sp(2m) = \{A \in M(p+q,\mathbf{R}); A^t I_{p,q} A = I_{p,q}\}$　擬直交群 (pseudo-orthogonal group)

3. $n = 2m$ かつ $P = J_{2m} \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ のとき (ただし $p+q=n$)

   $K = \mathbf{C}$ ならば $Sp(2m,\mathbf{C}) = \{A \in M(2m,\mathbf{C}); A^t J_{2m} A = J_{2m}\}$　複素斜交群 (complex symplectic group)
   $K = \mathbf{R}$ ならば　$Sp(2m) = \{A \in M(2m,\mathbf{R}); A^t J_{2m} A = J_{2m}\}$　実斜交群 (real symplectic group)

4. $K = \mathbf{C}$　かつ　$Q = I_n$ のとき

   $U(n) = \{A \in M(n,\mathbf{C}); A^\dagger A = I_n\}$　ユニタリ群 (unitary group)

5. $K = \mathbf{C}$　かつ　$Q = I_{p,q}$ のとき (ただし $p+q=n$)

   $U(p,q) = \{A \in M(p+q,\mathbf{C}); A^\dagger I_{p,q} A = I_{p,q}\}$　擬ユニタリ群 (pseudo-unitary group)

上の群を基本として、さらに特殊線形群の部分群に制限したものも得られる。

6. 特殊直交群

$$SO(n,\mathbf{C}) = SL(n,\mathbf{C}) \cap O(n,\mathbf{C})$$
$$SO(n) = SL(n,\mathbf{R}) \cap O(n)$$

7. 特殊擬直交群　$SO(p,q) = SL(p+q,\mathbf{R}) \cap O(p,q)$
8. 特殊ユニタリ群　$SU(n) = SL(n,\mathbf{C}) \cap U(n)$
9. 特殊擬ユニタリ群　$SU(p,q) = SL(p+q,\mathbf{C}) \cap U(p,q)$
10. ユニタリ斜交群　$USp(n) = U(2m) \cap SP(2m,\mathbf{C})$

古典線形群は $M(n,K)$ の部分集合で与えられるので各元 $A \in M(n,K)$(成分 a_{ij}) にノルムとして

$$||A|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \tag{87}$$

を定義すれば、位相を導入できる。
一般に位相群とは G が位相空間で

1. $G \times G$ から G への写像 $(x,y) \mapsto xy$ が連続
2. G から G への写像 $x \mapsto x^{-1}$ が連続

であるものをいう。古典線形群は位相群である。

A.2　$SU(2)$ 群と $SO(3)$ 群

ここでは古典群の具体例を挙げて詳しく見よう。

A.2.1　$SU(2)$ 群

$SU(2)$ 群の元 $g \in SU(2)$ は複素数 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ を用いて

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{88}$$

で表される。実数 $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ を用いて $\alpha = x_0 + ix_3, \beta = x_2 + ix_1$ とおくと

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \mathbf{1} + i \sum_{a=1}^{3} x^a \sigma^a, \quad \text{ただし } x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 1 \tag{89}$$

となり 3 次元球面 S^3 と同相であることがわかる。[*7]

さらに、g を角度 θ, ϕ_1, ϕ_2 を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{\phi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\phi_1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\phi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\phi_2}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{90}$$

ただし、パラメータのとる領域は

$$0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le \phi_1 \le 2\pi, \ \ 0 \le \phi_2 \le 4\pi \tag{91}$$

である。

A.2.2　$SO(3)$ 群

$\mathbf{R}^3$ の z 軸まわりの角度 ϕ ぶんの回転を p_ϕ, x 軸周りの角度 θ ぶんの回転を q_θ とかく。すなわち

$$p_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{92}$$

任意の回転 $g \in SO(3)$ はオイラー角 θ, ϕ_1, ϕ_2 を用いて

$$g = p_{\phi_1} q_\theta p_{\phi_2} \tag{93}$$

と表される。ただし、オイラー角のとりうる領域は

$$0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le \phi_1 \le 2\pi, \ \ 0 \le \phi_2 \le 2\pi \tag{94}$$

である。

[*7] このパラメトリゼーションは $SU(2)$ Yang-Mills 理論のモンテカルロ積分のアルゴリズムの一つである pseudo heatbath アルゴリズムで用いられる。

A.2.3 $SU(2)$ 群と $SO(3)$ 群の対応関係

2×2 行列でトレースがゼロかつエルミートな行列 X の全体の集合 V を考える。V は実ベクトル空間をなす。V の任意の元 $X \in V$ は

$$X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}, \quad \text{ここで } x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \tag{95}$$

で与えられる。内積は

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY^\dagger) \tag{96}$$

で与えることにする。今、$SU(2)$ の元 $g \in SU(2)$ に対し、ベクトル空間 V から V への写像 $Ad(g)$ を

$$(Ad(g))X = gXg^{-1} \tag{97}$$

で定義する。定義から $(Ad(g))X$ もトレースがゼロかつエルミートな行列であり、X に対して線形である。また、

$$(Ad(g)X, Ad(g)Y) = \mathrm{Tr}(gXg^{-1}(gYg^{-1})^\dagger) = (X, Y) \tag{98}$$

となるので、$Ad(g)$ は実ベクトル空間 V における直交変換（ベクトル長さを変えない変換）である。また、写像の定義から

$$Ad(gh) = Ad(g) \cdot Ad(h) \tag{99}$$

が成り立つことがわかるので、式 (90) で与えられる g を用いた $Ad(g)$ の作用は行列 g の積の分解に対応して行列 $Ad(g)$ も行列の積に分解できて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{100}$$

となることが示せる。これはまさにオイラー角を用いた 3 次元ベクトルの回転になっている。このことから $SU(2)$ 群の元から $SO(3)$ の元への写像を作ることができた。$SU(2)$ 群の元と $SO(3)$ 群の元のパラメーターの取りうる領域 (91), (94) の違いに注目しよう。$SU(2)$ 群では ϕ_2 の取りうる領域が $0 \leq \phi_2 \leq 4\pi$ と $SO(3)$ 群の場合の 2 倍になっている。余分な領域は $0 \leq \phi_2 \leq 2\pi$ の領域のパラメーターを $\phi_2 \to \phi_2 + 2\pi$ と置きかえでカバーできるが、このとき式 (90) の表式から明らかなように、$g \to -g$ とマイナス符号がつく。$Ad(g)$ は定義から X を g と g^{-1} ではさむのでマイナス符号は相殺して、$Ad(-g) = Ad(g)$ となる。つまり $SU(2)$ 群の 2 つの元 $g, -g$ が同じ $SO(3)$ の元 $Ad(g)$ に対応する 2 対 1 の写像であることがわかった。

このことから

$$SU(2)/\mathbf{Z}_2 \simeq SO(3) \tag{101}$$

であることがいえる。

A.3　$SU(2)$ 群の表現

まず表現空間として、複素変数 z について高々 $2l$ 次の複素係数多項式全体の空間 V_l をとる。V_l の元は $\sum_{k=0}^{2l} a_k z^k$ のようにかける。空間 V_l に

$$\left(\sum_{k=0}^{2l} a_k z^k, \sum_{k=0}^{2l} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{2l} k!(2l-k)!a_k^* b_k \tag{102}$$

で内積を定義する。この内積により、以下の $2l+1$ 種類の多項式が正規直交基底となる。

$$\phi_m(z) = \frac{z^l - m}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} \quad (m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l) \tag{103}$$

次に群 $SU(2)$ の任意の元 g は複素数 α, β を用いて

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1) \tag{104}$$

で与えられる。これに対し、$SU(2)$ の V_l 上での表現を以下で与える。

$$(T_l(g)f)(z) = (\beta z + \alpha^*)^{2l} f(\frac{\alpha z - \beta^*}{\beta z + \alpha^*}) \tag{105}$$

実際、この定義により

$$(T_l(g)(T_l(h)f))(z) = (T_l(gh)f)(z), \quad (T_l(e)f)(z) = f(z) \tag{106}$$

が成り立つこと、また写像が連続であること容易に示せるので確かに表現となっている。また、これがユニタリ変換である（内積を不変に保つ）ことも確かめられる (証明略)。

具体例

1. **$l = 0$ の時**

   表現空間 V_0 に属する関数は定数関数のみで 1 次元空間である。式 (105) より $T_0 = 1$ で自明な表現である。

2. **$l = 1/2$ の時**

   表現空間 $V_{1/2}$ は 2 次元空間で $\phi_{-1/2} = z,\ \phi_{1/2}(z) = 1$ である。式 (105) より

   $$T_{1/2}(g)z = \alpha z - \beta^*, \quad T_{1/2}(g)1 = \beta z + \alpha^*, \tag{107}$$

   であり、ベクトル $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ に作用する行列で表すと

   $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{108}$$

   となる。すなわち $T_{1/2}$ は恒等表現であることがわかった。

3. $l=1$ **の時**

表現空間 V_1 は 3 次元空間で $\phi_{-1}=z^2/\sqrt{2},\ \phi_0(z)=z,\ \phi_1(z)=1/\sqrt{2}$ である。式 (105) より

$$T_1(g)z^2/\sqrt{2}=(\alpha z-\beta^*)^2/\sqrt{2}, \tag{109}$$

$$T_1(g)z=(\alpha z-\beta^*)(\beta z+\alpha^*) \tag{110}$$

$$T_{1/2}(g)1/\sqrt{2}=(\beta z+\alpha^*)^2/\sqrt{2}, \tag{111}$$

であり、ベクトル $\begin{pmatrix} z^2/\sqrt{2} \\ z \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ に作用する行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\alpha\beta^* & \alpha\alpha^*-\beta\beta^* & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ (\beta^*)^2 & -\sqrt{2}\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix} \tag{112}$$

となる。

A.4 不変積分の例

例 1:$GL(n,\mathbf{R})$ $GL(n,\mathbf{R})$ の元 $g\in G$ の成分を x_{ij} $(x_{ij}\in\mathbf{R})$ とすると、変換 $g\mapsto ag$ と変換 $g\mapsto ga$ とのヤコビアンは $|\mathrm{det}a|^n$ である。よって

$$I(f)=\int\cdots\int f(g)|\mathrm{det}g|^{-n}\prod_{i,j}dx_{ij} \tag{113}$$

は左不変積分かつ右不変積分である。

例 2:$GL(n,\mathbf{C})$ $GL(n,\mathbf{C})$ の元 $g\in G$ の成分を $x_{ij}+iy_{i,j}$ $(x_{ij},y_{ih}\in\mathbf{R})$ とすると、変換 $g\mapsto ag$ と変換 $g\mapsto ga$ とのヤコビアンは $|\mathrm{det}a|^{2n}$ である。よって

$$I(f)=\int\cdots\int f(g)|\mathrm{det}g|^{-2n}\prod_{i,j}dx_{ij}dy_{ij} \tag{114}$$

は左不変積分かつ右不変積分である。

例 3:$SU(2)$ $SU(2)$ は

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \gamma=-\beta^*,\delta=\alpha^*,|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{115}$$

より実数パラメータ x_1,x_2,x_3,x_4 を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1+ix_2 & x_3+ix_4 \\ -x_3+ix_4 & x_1-ix_2 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}x_i^2=1 \tag{116}$$

と表せるので 3 次元球面 S^3 と同相である。ここで $x_1,\cdots,x_4$ は $0\le t\le 1, 0\le\varphi,\psi\le 2\pi$ を用いて

$$x_1=\sqrt{t}\cos\varphi \tag{117}$$

$$x_2=\sqrt{t}\sin\varphi \tag{118}$$

$$x_3=\sqrt{1-t}\sin\psi \tag{119}$$

$$x_2=\sqrt{1-t}\sin\psi \tag{120}$$

と表せる。S^3 上の線要素 ds は

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \frac{1}{4t(1-t)}dt^2 + td\varphi^2 + (1-t)d\psi^2 \tag{121}$$

であるから、S^3 上の体積要素 $d\mu(g)$ は

$$d\mu(g) = dtd\varphi d\psi \tag{122}$$

で与えられる。これは左不変かつ右不変であることが確かめられる。

A.5 複素化

実リー代数を $\mathfrak{g}$、その基底を $\{T_a\}$ とする。基底に任意の複素数をかけて和をとったもの全体

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \left\{ \sum_a z_a T_a ; z_a \in \mathbf{C} \right\} \tag{123}$$

を $\mathfrak{g}$ の複素化という。

例 $\mathfrak{su}(2)^{\mathbf{C}} = \mathbf{sl}(2) = \big\{2 \times 2 \text{ 複素行列}, \text{traceless}\big\}$

例 $\mathfrak{so}(2,1)^{\mathbf{C}} = \mathbf{sl}(2)$
実リー代数としては異なっていても複素化すると同じになるケースもある。

複素リー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の実構造を定義するため $\dagger$ を以下で定義する。
$\dagger : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ なる写像で、任意の $a, b \in \mathbf{C}, X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$ に対して次を満たすもの

1. $\big(X^\dagger\big)^\dagger = X$
2. $(aX + bY)^\dagger = a^* X^\dagger + b^* Y^\dagger$
3. $[X, Y]^\dagger = -[X^\dagger, Y^\dagger]$

この $\dagger$ を用いて複素リー代数 $\mathfrak{g}$ の実構造 $\mathfrak{g}$ は例えば以下で定義される。

$$\mathfrak{g} = \big\{X \in \tilde{\mathfrak{g}} | X^\dagger = -X\big\} \tag{124}$$

これより $\mathfrak{g}$ を考える代わりに $\big(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \dagger\big)$ を考えても良い、ということがわかる。

例: $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2)$ のとき 基底 T_a $(a = 1, 2, 3)$ $[T_a, T_b] = \epsilon_{abc} T_c$ $\epsilon_{abc} = \pm 1$ (abc について完全反対称)
実構造 1 $T_a^\dagger = -T_a \to \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$
実構造 2 $T_{1,2}^\dagger = T_{1,2}, T_3^\dagger = -T_3 \to \mathfrak{so}(2,1)$

A.6 $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ の表現

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ リー代数は $\{X \in M(n, \mathbf{C}); \mathrm{tr} X = 0\}$ なので、その基底として

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{125}$$

をとる。交換関係は

$$[E, F] = H, \tag{126}$$
$$[H, E] = 2E, \tag{127}$$
$$[H, F] = -2F, \tag{128}$$

である。

$(\rho, \tilde{V})$ を $\mathfrak{sl}(2)$ の 0 でない任意の表現とすると

$$[\rho(E), \rho(F)] = \rho(H), \tag{129}$$
$$[\rho(H), \rho(E)] = 2\rho(E), \tag{130}$$
$$[\rho(H), \rho(F)] = -2\rho(F), \tag{131}$$

が成り立つ。

$\rho(H)$ の固有ベクトルであって、かつ $\rho(E)$ を作用させてゼロとなるものを**原始ベクトル**と呼ぶ。このようなベクトルは有限次元表現では存在する。なぜなら $\rho(H)$ の固有ベクトル $v \in \tilde{V}$ とその固有値を λ とするとき、もし $\rho(E)$ をかけて消えないなら

$$\rho(H)\rho(E)v = \underbrace{[\rho(H), \rho(E)]}_{=2\rho(E)} v + \rho(E) \underbrace{\rho(H)}_{=\lambda} v \tag{132}$$
$$= (\lambda + 2)\rho(E)v \tag{133}$$

となり、原始ベクトルが存在しないなら、$\lambda, \lambda + 2, \lambda + 4, \cdots$ が全て $\rho(H)$ の固有値になって V が有限次元であることと矛盾するからである。

さて、v を $\rho(H)$ の固有値 λ の原始ベクトルとする。$v_n = (\rho(F))^n v$ とおけば、性質

1. $\rho(H)v_n = (\lambda - 2n)v_n$
2. $\rho(E)v_n = n(\lambda - n + 1)v_{n-1}$
3. $\rho(F)v_n = v_{n+1}$

が成り立つ。3 は定義より明らかである。1,2 については数学的帰納法を用いる。$n = 0$ のとき 1,2 が成り立つのは原始ベクトルの定義から明らかである。$n = 1, \cdots, m$ のとき成り立つとする。すると、$n = m + 1$ のときはどうなるだろうか。

$$\rho(H)v_{m+1} = \rho(H)\rho(F)v_m = \underbrace{[\rho(H), \rho(F)]}_{=-2\rho(F)} v_m + \rho(F) \underbrace{\rho(H)}_{=\lambda-2m} v_m = (\lambda - 2(m + 1))v_{m+1} \tag{134}$$

$$\rho(E)v_{m+1} = \rho(E)\rho(F)v_m = \underbrace{[\rho(E), \rho(F)]}_{=\rho(H)=\lambda-2m} v_m + \rho(F) \underbrace{\rho(E)v_m}_{=(m(\lambda-m+1)v_{m-1}} = (m + 1)(\lambda - m)v_m \tag{135}$$

となり、$n = m + 1$ のときにも 1,2 が成り立つ。

このことから (ρ, V) が $\mathfrak{sl}2$ の既約表現で表現次元が $m + 1 = \mathrm{dim}V$ のとき $\{v_0, v_1, \cdot, v_m\}$ が V の基底となり $\rho F v_m = 0$ となるはずなので、

λ が整数でないときは表現は無限個のベクトル v_n $(n = 1, 2, \cdots)$ から構成されるため無限次元の表現となる。λ が整数 k に等しいときは性質 2 より、

$$\rho(E)v_{k+1} = 0 \tag{136}$$

となる。したがってベクトル v_n $(n \leq k+1)$ で張られるベクトル空間は $\tilde{V}$ の不変部分空間 W をなす。(既約表現は不変部分空間を持たないことが定義である。) このことから、W の元をゼロとみなすことでベクトル空間 V を定義する、すなわち

$$V = \tilde{V}/W \tag{137}$$

と定義すれば、(ρ, V) が次元 k の表現を与える。

A.7 カルタン部分代数と Killing 形式

リー代数 $\mathfrak{g}$ 上で以下のような双一次形式 B を定義する。

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}\left(ad(X), ad(Y)\right), \quad X, Y \in \mathfrak{g} \tag{138}$$

すべての X に対して $B(X,Y)=0$ となるのは $Y=0$ に限るとき Killong 形式が**非退化**であるという。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化であるとき**半単純リー代数**という。

半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の元のうち互いに可換でエルミートな元をとり

$$H_i^\dagger = H_i, \quad [H_i, H_j] = 9, i, j = 1, \cdots, r \tag{139}$$

となるよう選べる。このうち r が最大となるものがなす代数を**カルタン部分代数 (Cartan subalgebra)** という。r を $\mathfrak{g}$ の**階数 (rank)**という。H_i の固有値を上げ下げする $\mathbf{g}$ の元を $E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}$ とし、

$$[H_i, E_{\pm\vec{\alpha}}] = \pm(\vec{\alpha})^i E_{\pm\vec{\alpha}} \tag{140}$$

としよう。$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}]$ は H_i と交換することから必ずカルタン部分代数の元でかけるので係数 a^i を用いて

$$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}] = \sum_{i=1}^{r} a^i H_i =: H_{\vec{\alpha}} \tag{141}$$

と表せる。この a^i がどのように決定されるかがここからの議論である。

H_i と $H_{\vec{\alpha}}$ の Killing 形式は

$$B(H_i, H_{\vec{\alpha}}) = \mathrm{tr} \sum_{i=1}^{r} a^j ad(H_i) ad(H_j) \tag{142}$$

一方で、

$$\begin{aligned} B(H_i, H_{\vec{\alpha}}) &= \mathrm{tr}(ad(H_i)\left[ad(E_{\vec{\alpha}}), ad(E_{-\vec{\alpha}})\right]) \\ &= \mathrm{tr}(\left[ad[H_i), ad(E_{\vec{\alpha}})\right], ad(E_{-\vec{\alpha}})) \\ &= (\vec{\alpha})^i \mathrm{tr}(ad(E_{\vec{\alpha}}), ad(E_{-\vec{\alpha}})) \end{aligned} \tag{143}$$

と等しくなることがわかる。適切に規格化を行なって、

$$\mathrm{tr}(ad(E_{\vec{\alpha}}), ad(E_{-\vec{\alpha}})) = 1 \tag{144}$$

とすることができる。カルタン代数上の Killing 形式を

$$g_{ij} = \mathrm{tr}(ad(H_i) ad(H_j)) \tag{145}$$

とおいて式 (142) と式 (143) を比較すると

$$a^i = \sum_{j=1}^{r} g_{ij} (\vec{\alpha})^j \tag{146}$$

を得る。$g_{ij} = \delta_{ij}$ の時は必然的に

$$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}] = \sum_{i=1}^{r} (\vec{\alpha})^i H_i \tag{147}$$

となる。