

# 格子上の場の理論 夏の学校2024

## 有限温度

大野 浩史

(筑波大学計算科学研究センター)

2024年9月13日

筑波大学東京キャンパス

# 本講義の内容

- 自己紹介
- 導入
  - 有限温度とは？
  - Quark Gluon Plasma (QGP)
  - QCD相図
  - Columbia Plot
- Columbia Plot
  - クエンチ近似: 閉じ込め・非閉じ込め相転移、Polyakovループ
  - 重クォーク領域: ホッピングパラメタ展開
  - 2フレーバー: ディラック固有値
  - 3フレーバー: 有限サイズスケーリング
- クロスオーバー温度
- 状態方程式
- クォーコニウムスペクトル関数

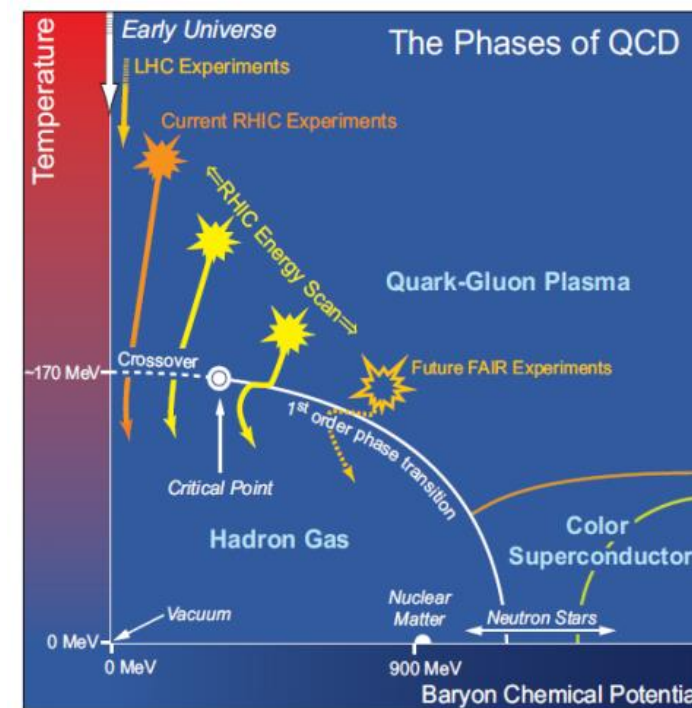
# 自己紹介

- 氏名: 大野浩史 (おおのひろし)
- 所属: 筑波大学計算科学研究センター
- 専門: 格子上の場の理論とその数値的計算手法
  - 特に有限温度・密度QCDの数値的研究
  - QCDの相構造の解明
    - 相転移が起こる温度は？圧力は？
    - 相転移の次数は？
  - 超高温・高密度状態の物質の性質の解明
    - 宇宙初期 (超高温) や中性子星内部 (超高密度) では物質はどのように振る舞うのか？
    - 重イオン衝突実験の結果をどう説明できるか？

- 最近では機械学習の応用にも興味がある  
学術変革領域研究 (A) 「学習物理学の創成」  
研究計画AO1 「計算物理学と機械学習の融合」

MLPhYS

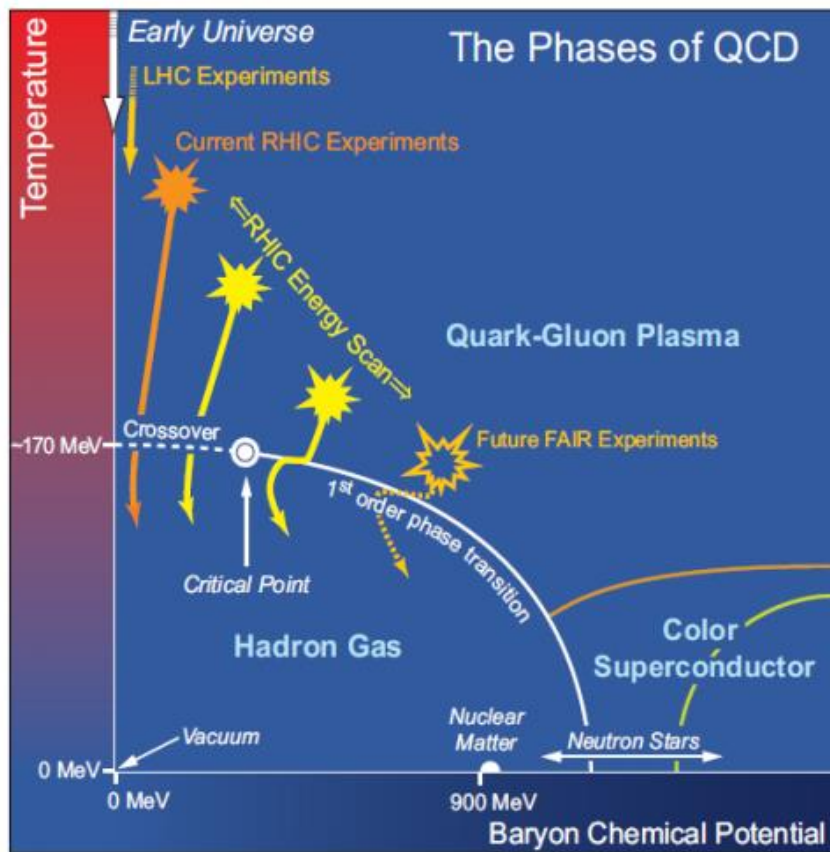
<https://mlphys.scphys.kyoto-u.ac.jp/>



L. Kumar, Mod. Phys. Lett. A, 28 1330033 (2013)

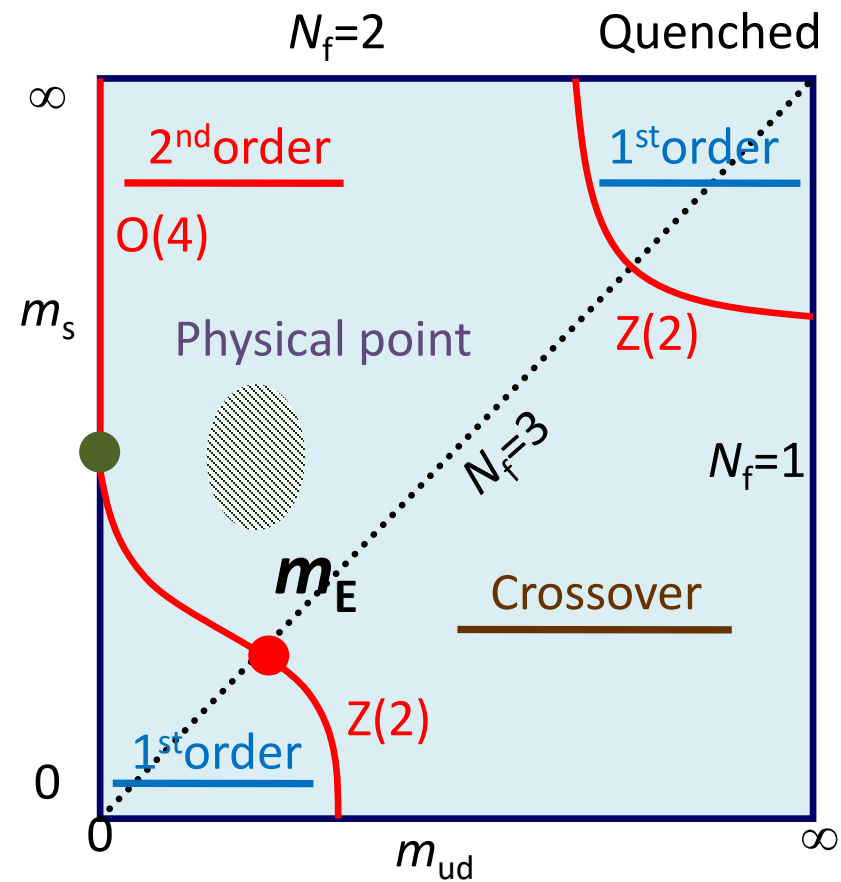
# 本日の図2選

## QCD相図



L. Kumar, Mod. Phys. Lett. A, 28 1330033 (2013)

## Columbia Plot



# 有限温度とは？

有限温度

？

Finite Temperature

？

Nonzero Temperature

！

有限温度  $\neq$  ゼロ温度

# 有限温度の場の理論

- 分配関数と経路積分 渡辺さんの講義参照

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle = \int_{q(0)=q(\beta)=q} Dq e^{-\int_0^\beta d\tau L_E[q]}$$

$\beta$ : 逆温度

$L_E$ : Euclid化したLagrangian  
境界条件: boson  $\rightarrow$  周期的、  
fermion  $\rightarrow$  反周期的

## 有限温度の場の理論

= 虚時間方向の長さが逆温度のEuclideanな場の理論

# 有限温度における格子上の場の理論

- 時間方向の格子サイズと温度の関係

$$\frac{1}{T} = \beta = N_\tau a$$

$T$ : 温度

$N_\tau$ : 時間方向の格子サイズ

$a$ : 格子間隔

- Fixed  $N_\tau$  approach

- 格子サイズ  $N_\tau$  を固定
- 格子間隔  $a(g)$  を変えて温度を変化 (連続極限とは別)
- メリット: 連続的に温度を変えられる、温度分解能が高い
- デメリット: 格子間隔ごとにゼロ温度計算が必要

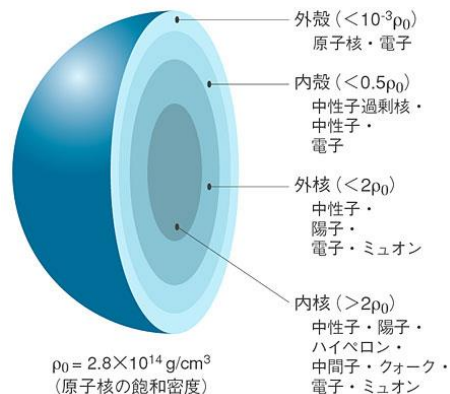
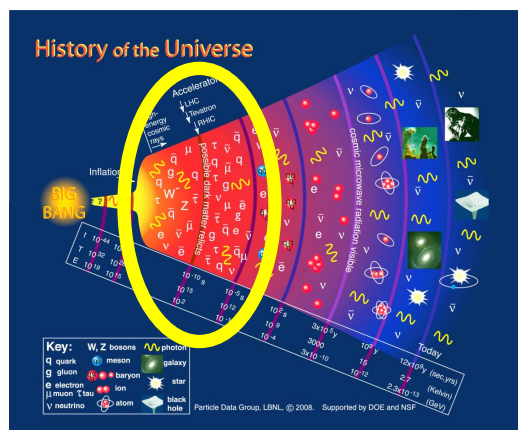
- Fixed scale ( $a$ ) approach

- 格子間隔  $a(g)$  を固定
- 格子サイズ  $N_\tau$  を変えて温度を変化
- メリット: ゼロ温度計算は一度行えばよい (体積やクォーク質量が同じならば)
- デメリット: 温度が離散的にしか変えられない、温度分解能が低い

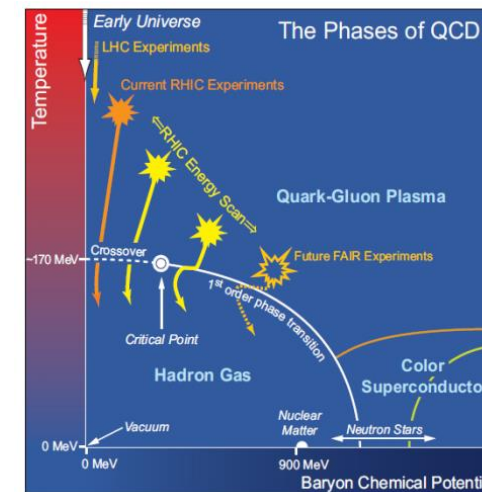
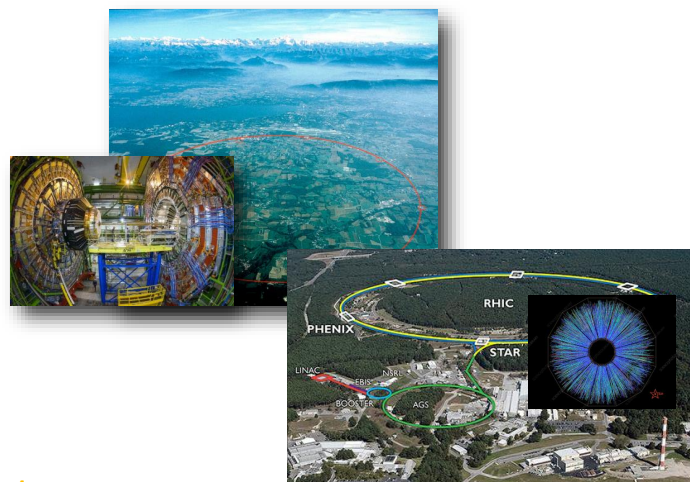


# 有限温度で何を調べるのか？

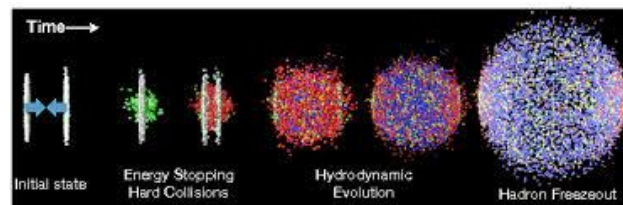
- 初期宇宙や中性子星内部はどうなっているのか？
- 重イオン衝突実験の結果をどう説明するのか？
- QCDの相構造はどうなっているのか？
- ...



<https://rdreview.jaea.go.jp/tayu/ACT04J/07/0707.htm>



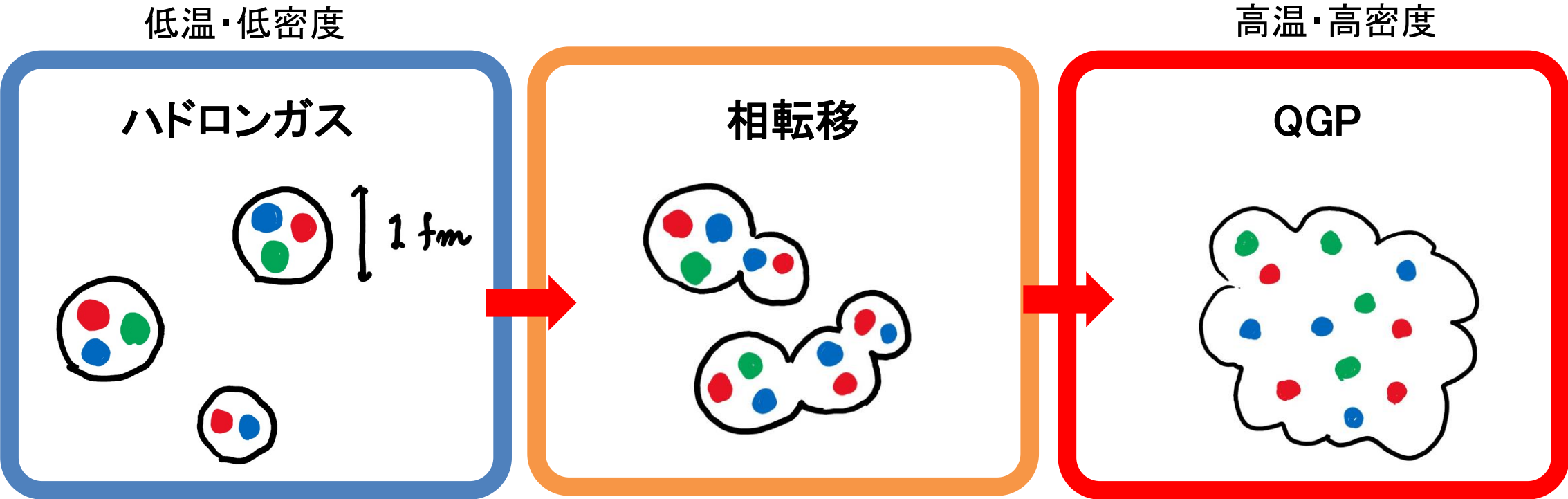
L. Kumar,  
Mod. Phys. Lett. A, 28 1330033 (2013)



T. Nayak Pramana 79 (2012) 719-735



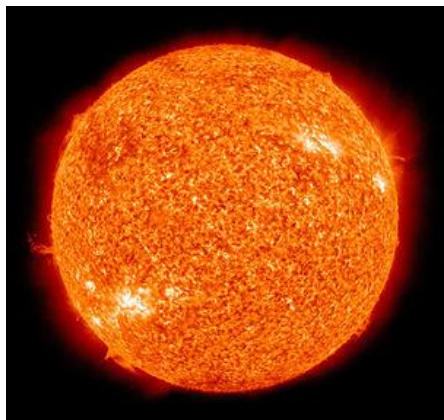
# 高温・高密度下の新しい状態：Quark Gluon Plasma (QGP)



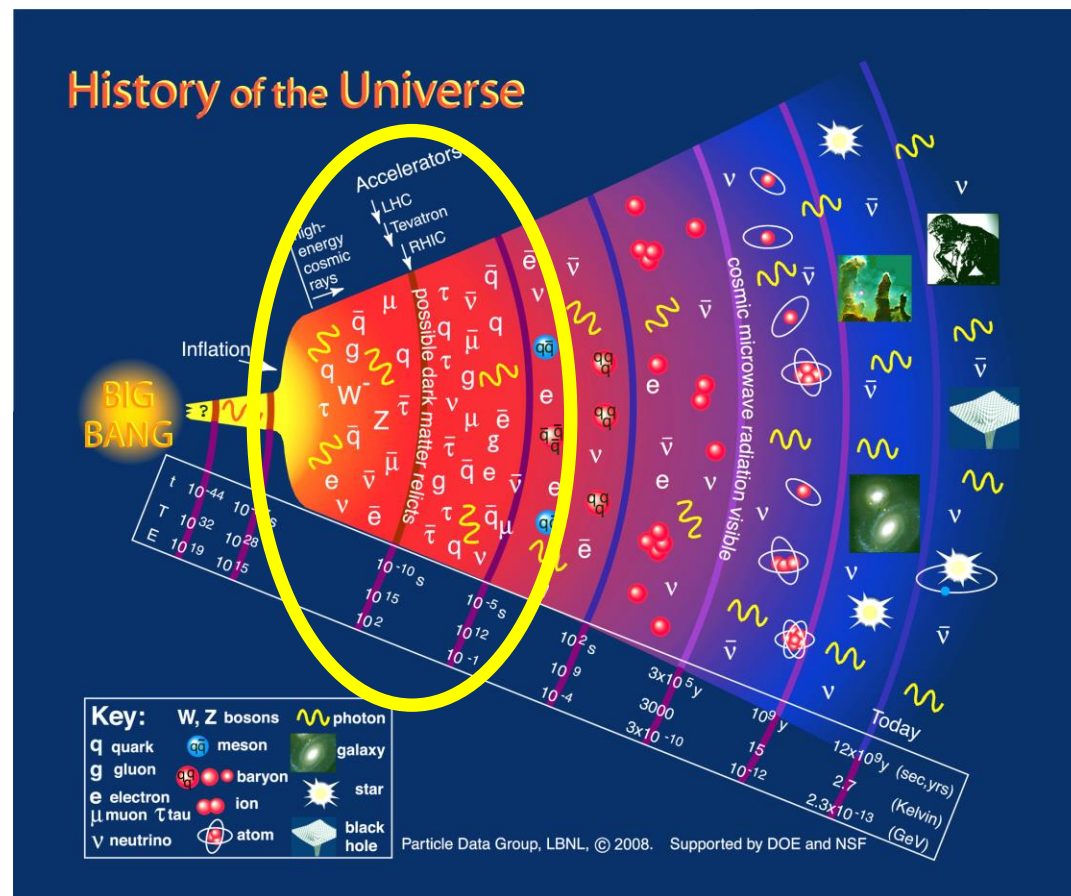
- ハドロンの典型的なサイズ  $\approx 1 \text{ fm}$
- 漸近的自由性により、 $1 \text{ fm}$  以下ではクォーク・グルーオンはほぼ自由
- 高温・高密度状態では自由な領域が重なる  $\rightarrow$  QGP
- 閉じ込め・非閉じ込め相転移、カイラル対称性の破れと回復の相転移

# QGPの実現が予想される例 その1：初期宇宙

- ビックバン直後：約 $10\mu$ 秒後まで
- 約 $10^{12}$ K以上
  - この相転移温度がどうやって計算されたかは後ほど紹介



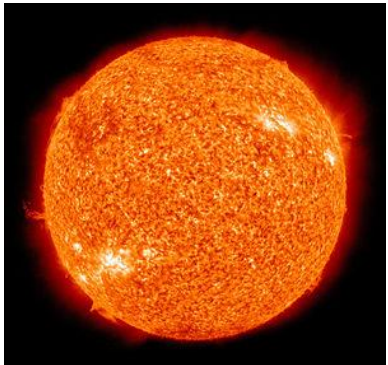
cf. 太陽の温度  
表面： $5772\text{K}$   
中心： $1.57 \times 10^7\text{K}$   
コロナ： $2 \times 10^6\text{K}$



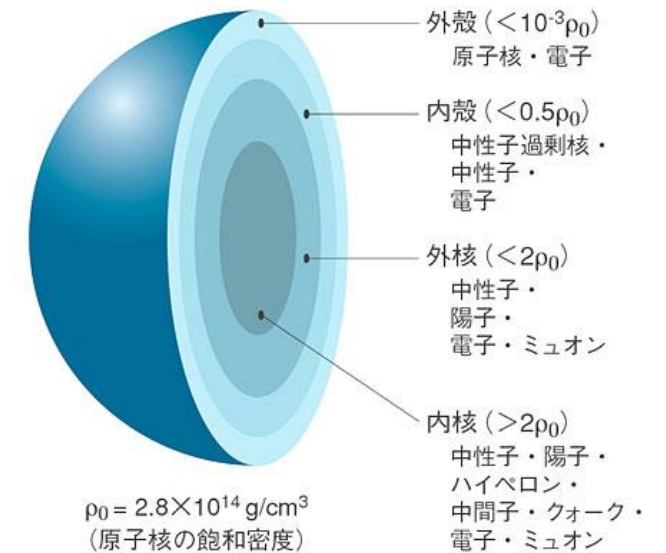
D. Perret-Gallix,  
J. Phys. Conf. Ser. 454, 012051 (2013)

# QGPの実現が予想される例 その2：中性子星内部

- 標準原子核密度  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  の2倍以上
- 中心部： $10 \sim 15\rho_0$



cf. 太陽の密度 =  $1.411 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$



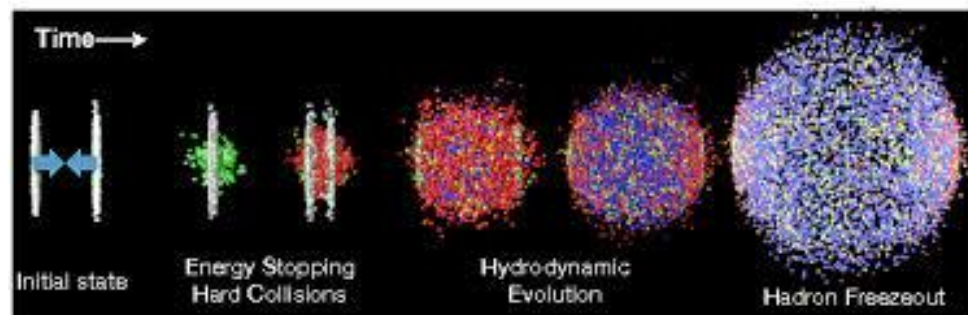
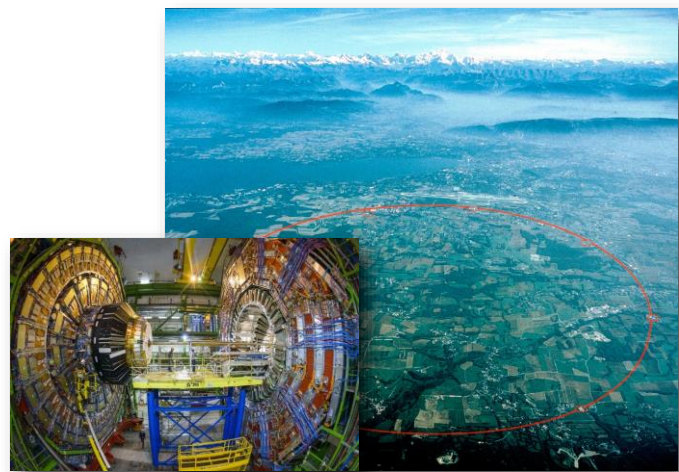
<https://rdreview.jaea.go.jp/tayu/ACT04J/07/0707.htm>



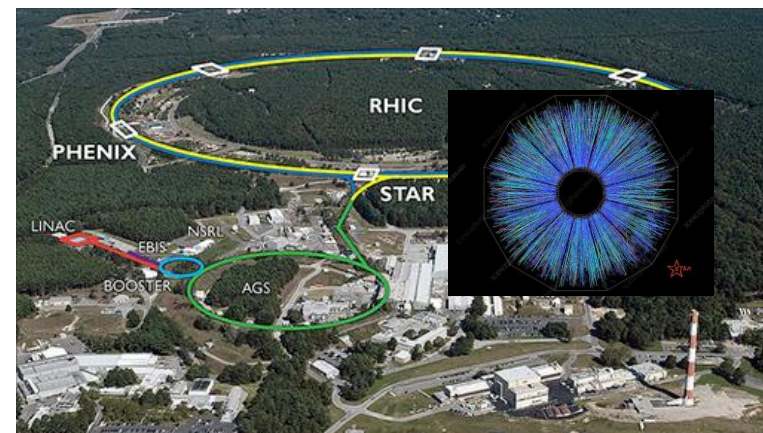
# QGPの実現が予想される例 その3：重イオン衝突実験

- RHIC@BNL, LHC@CERN等
- 重イオン（鉛や金の原子核）同士を光速に近い速度で衝突
- 衝突エネルギー：数100 GeV ~ 数 TeV

cf. eV(電子ボルト) =  $1.6 \times 10^{-19}$ J

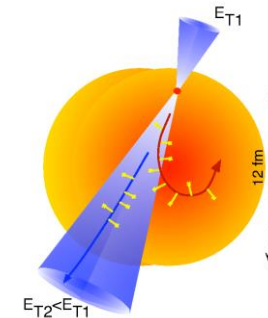
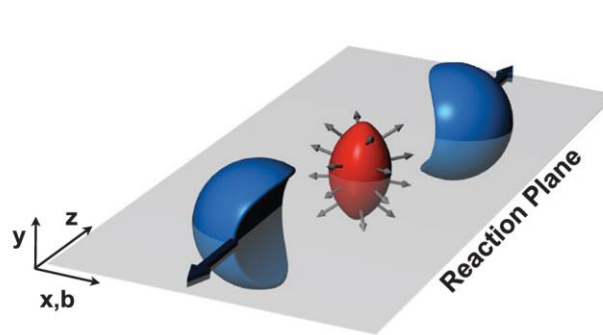


T. Nayak *Pramana* 79 (2012) 719-735



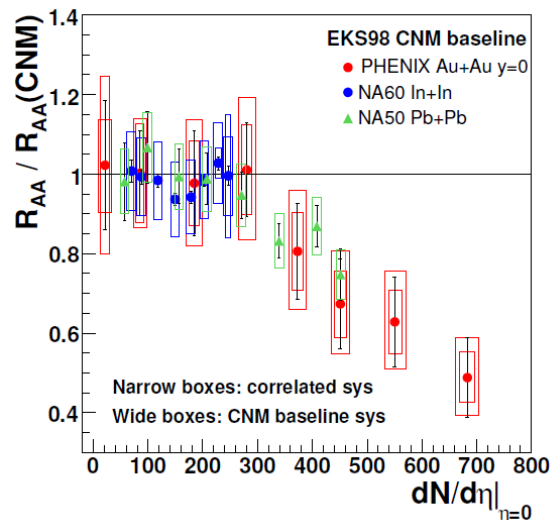
# 重イオン衝突実験におけるQGP生成の証拠

- クォークコニウム (チャーム・ボトムクォークとその反クォークの束縛状態) 抑制
- 楕円フロー (集団運動)
- ジェットクエンチング
- ...

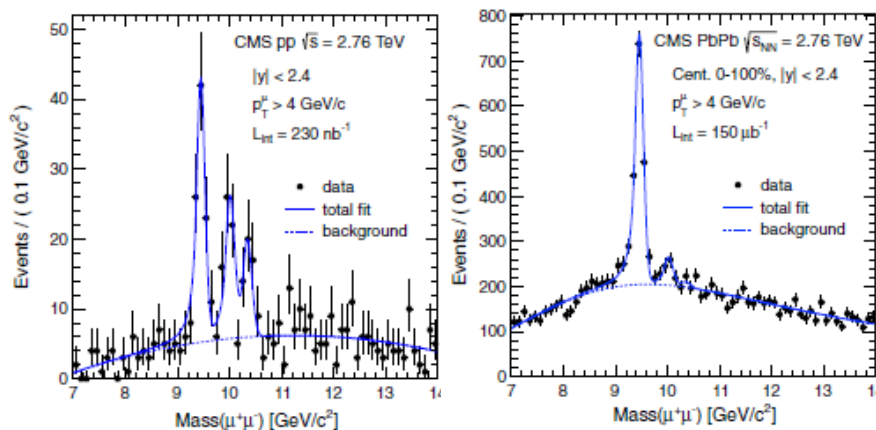


R. Snellings, *New J. Phys.* 13, 055008 (2011)

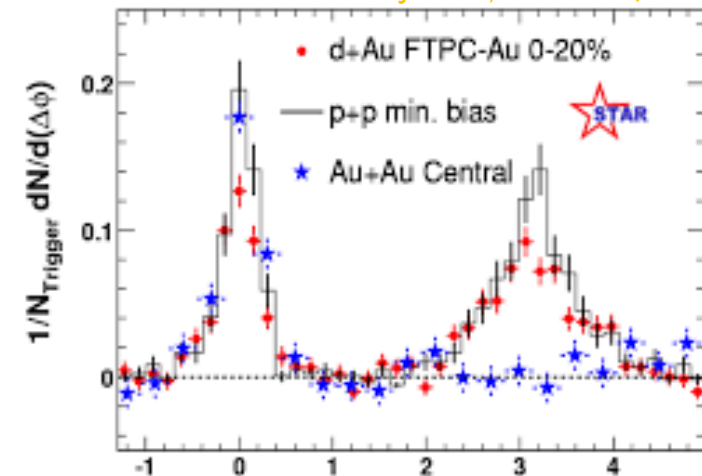
J. Casalderrey-Solana, *et al.*, *J. Phys.* 38, 124086 (2011)



N. Brambilla *et al.*, *EPJ C* 71 (2011) 1534



S. Chatrchyan *et al.*, *PRL* 109 (2012) 222301

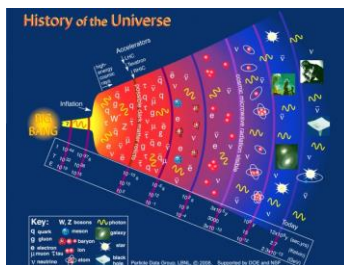


*Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 072304  
*Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 162301

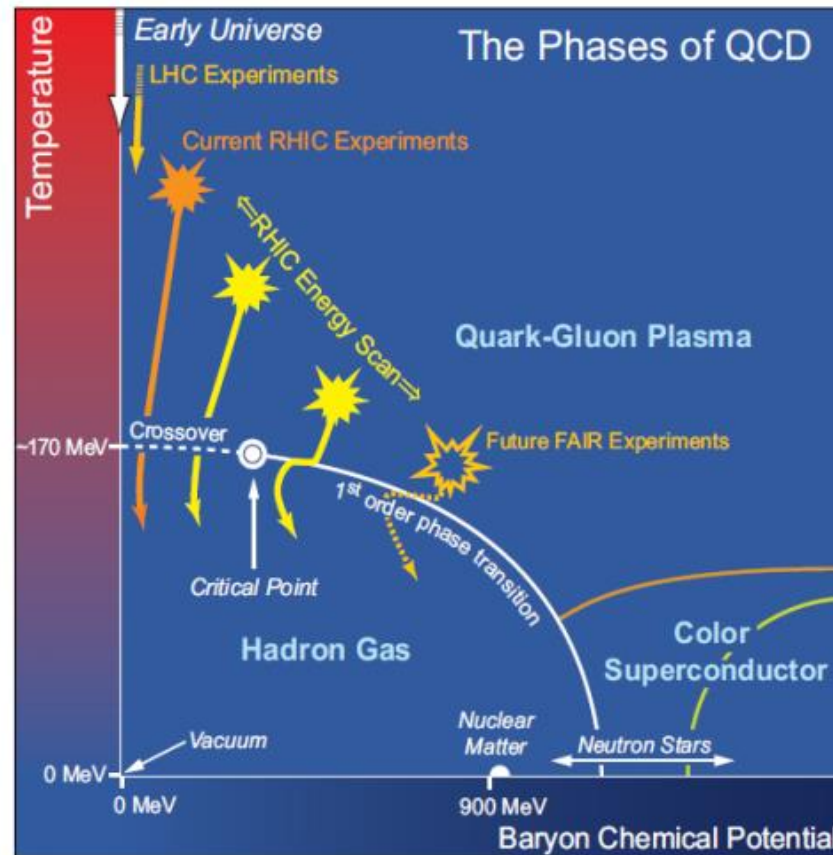
# 予想される QCD の相構造

- QCD相図についてのレビュー

- K. Fukushima and T. Hatsuda, "The phase diagram of dense QCD," Rept. Prog. Phys. 74, 014001 (2011)

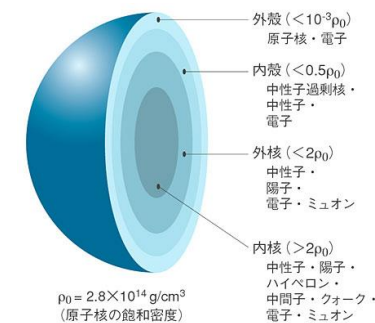
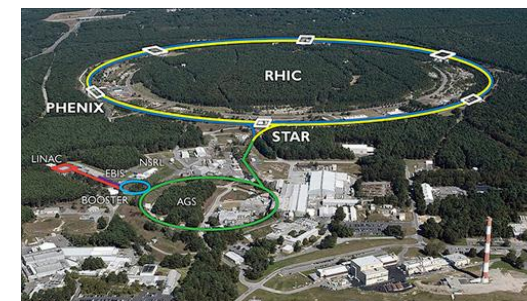


初期宇宙



L. Kumar, Mod. Phys. Lett. A, 28 1330033 (2013)

RHIC@BNL



$\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$   
(原子核の飽和密度)

中性子星内部

# カイラル対称性

- フェルミオン場の左巻きスピン成分と右巻きスピン成分を独立に回転させる変換 (カイラル変換) に対する対称性
- ゼロ質量のフェルミオン場について成り立つ

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} : \text{カイラル変換} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$
$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad P_{R/L} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad \psi_{R/L} \equiv P_{R/L}\psi, \quad \bar{\psi}_{R/L} \equiv \bar{\psi} P_{L/R}$$
$$= \bar{\psi}_L(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi_L + \bar{\psi}_R(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$$

- カイラル対称性の秩序変数 (order parameter): カイラル凝縮  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$
- Massless  $N_f$  フレーバーのフェルミオン場のカイラル対称性

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_A \times U(1)_V \rightarrow SU(N_f) \times U(1)_V$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$$

アノマリー (量子効果) で  
あらわに破れる

自発的対称性の破れ

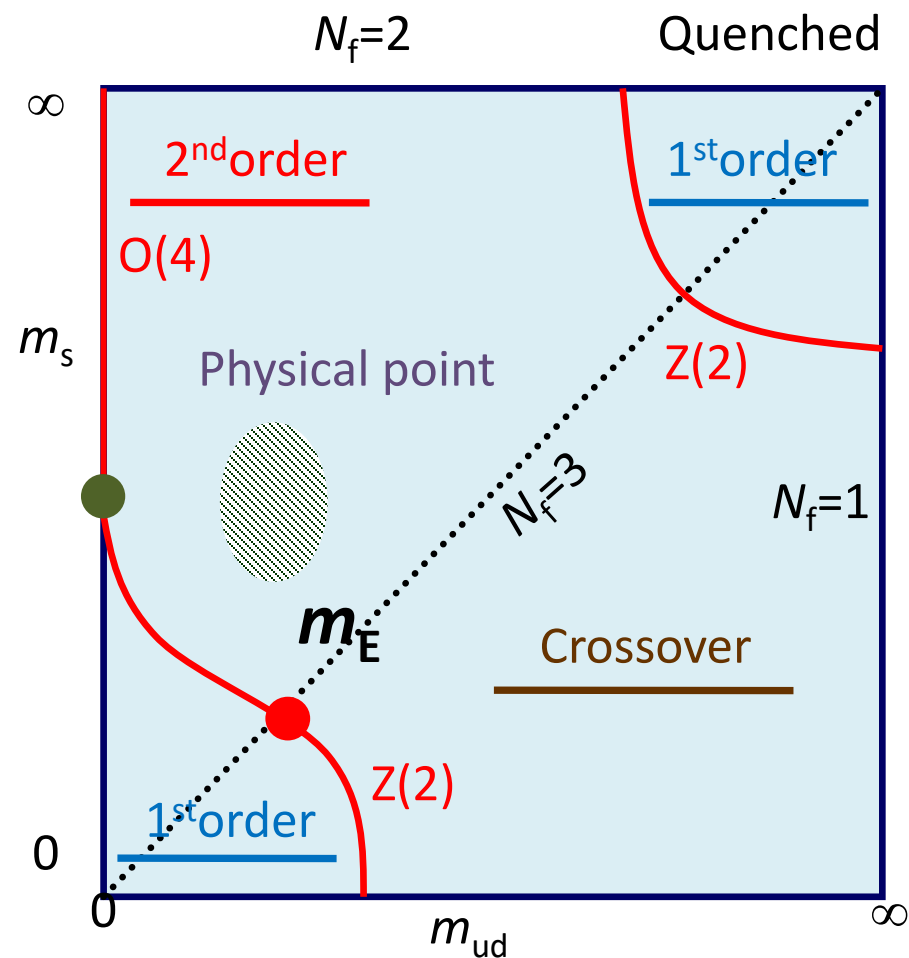
$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$$



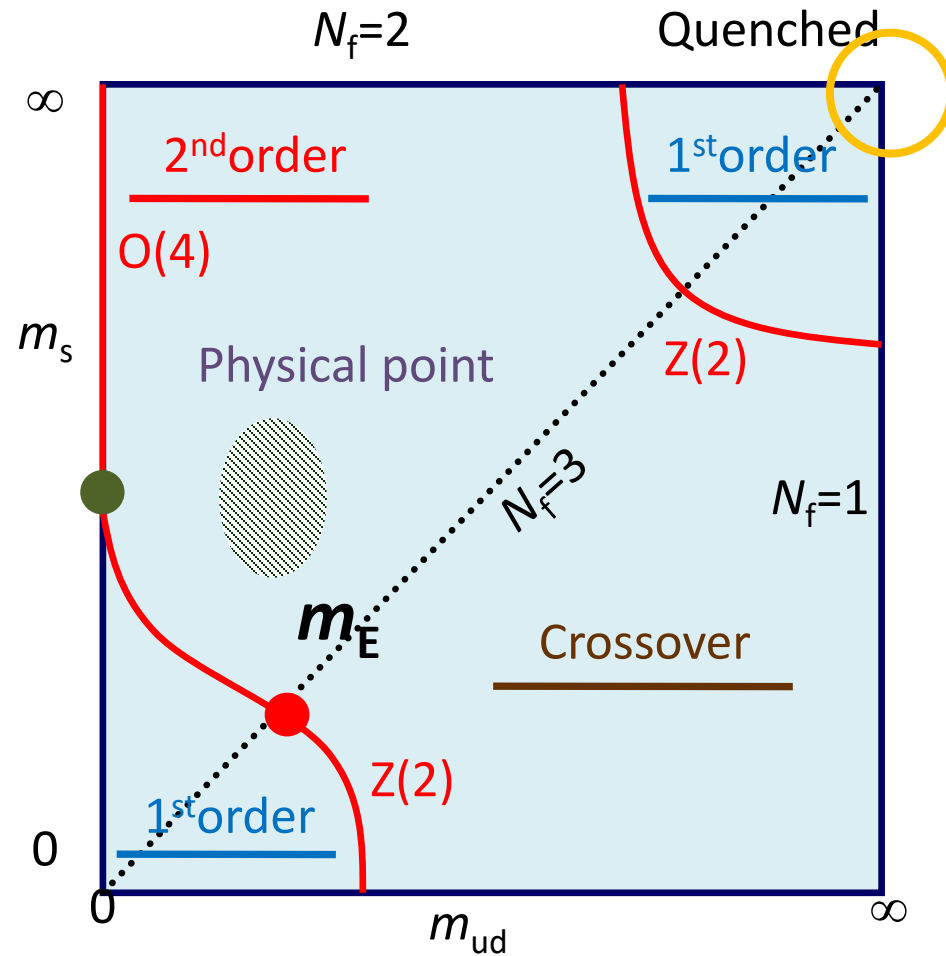
# Columbia Plot

- QCD相転移次数のクォーク質量とフレーバ数依存性の予想をまとめた図
- 多くの格子QCD計算により検証されてきた
- まだ議論されている部分が多くある
- $N_f = 0$  (quenched QCD)
  - 1<sup>st</sup> order (閉じ込め・非閉じ込め相転移)
- $N_f = 1$ 
  - 相転移なし
- Massless  $N_f = 2$ 
  - $U(1)_A$  対称性が有効的に回復した場合: 1<sup>st</sup> order
  - $U(1)_A$  が有効的に回復しない場合: 2<sup>nd</sup> order
- Massless  $N_f \geq 3$ 
  - 1<sup>st</sup> order
- $N_f = 3$  臨界終点 (Critical Endpoint, CEP)
  - 一次相転移とクロスオーバの境界の二次相転移点

R. D. Pisarski and F. Wilczek, PRD 29 (1984) 338



# Pure gauge理論の閉じ込め・非閉じ込め相転移



# ポリャコフ (Polyakov) ループ (1)

$$P(\mathbf{n}, T) = \text{Tr} \prod_{i=0}^T U_{(\mathbf{n}, i), 4} \quad T: \text{虚時間方向の格子サイズ}$$

$$\langle P(\mathbf{n}, T) \rangle \propto e^{-F_q T} \quad F_q = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left[ \frac{\langle 0 | q(\mathbf{n}, T) q(\mathbf{n}, 0)^\dagger | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \right]$$

↑  
静的クォーク1つを生成するのに必要な自由エネルギー

閉じ込め・非閉じ込めの秩序変数

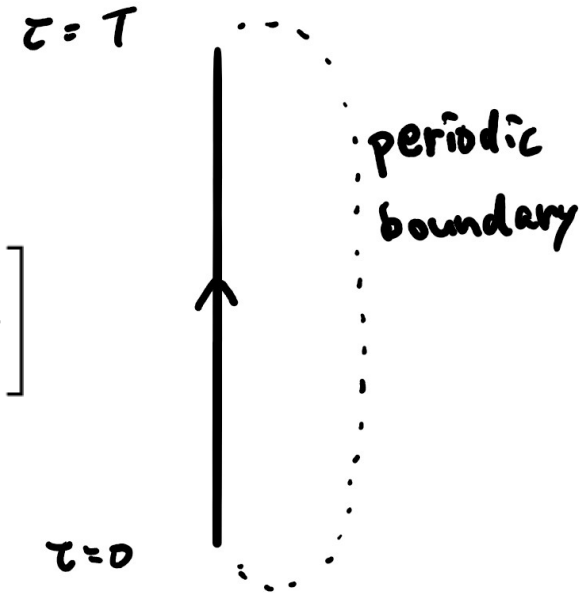
$$\begin{cases} \langle P(\mathbf{n}, T) \rangle = 0 \rightarrow F_q = \infty \leftarrow \text{クォークを取り出すのに無限のエネルギーが必要} = \text{閉じ込め} \\ \langle P(\mathbf{n}, T) \rangle \neq 0 \rightarrow F_q \neq \infty \end{cases}$$

$$U_4(\mathbf{n}, t) \rightarrow \omega_t U_4(\mathbf{n}, t)$$

$$\omega_t \in \mathbb{Z}_N : \text{SU}(N) \text{ center}$$

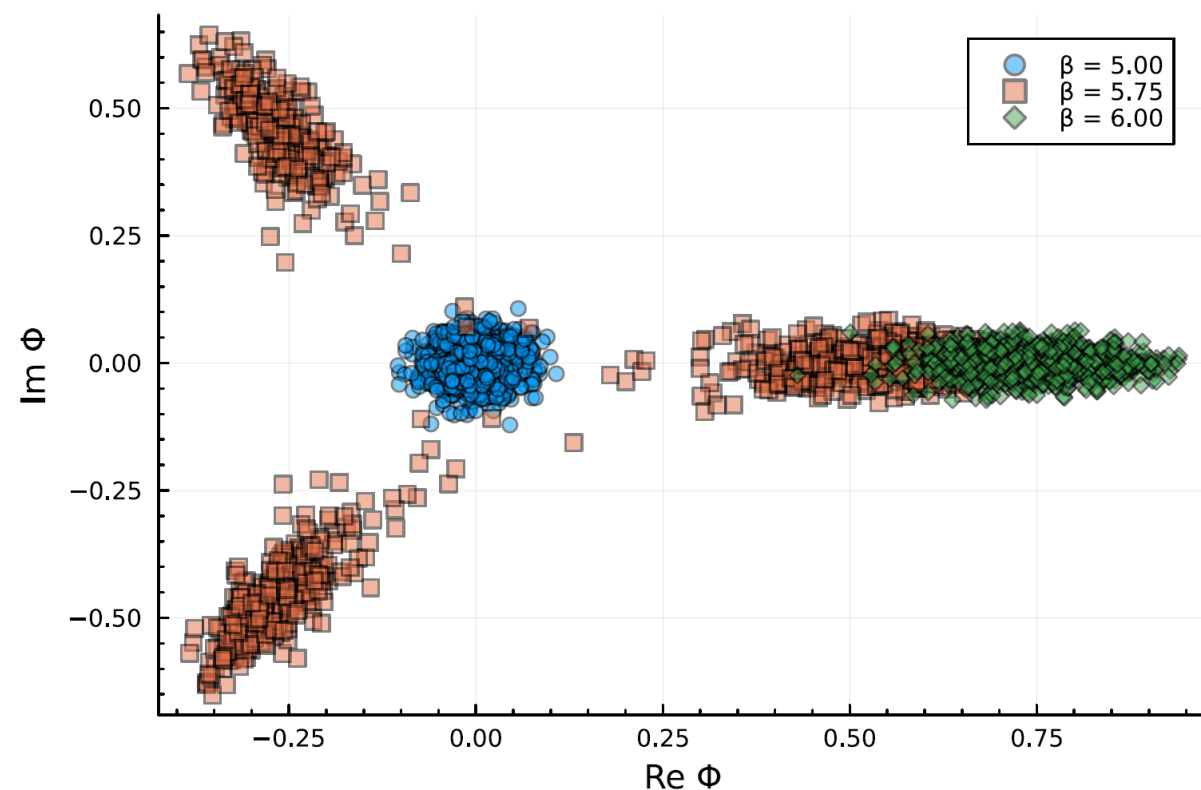
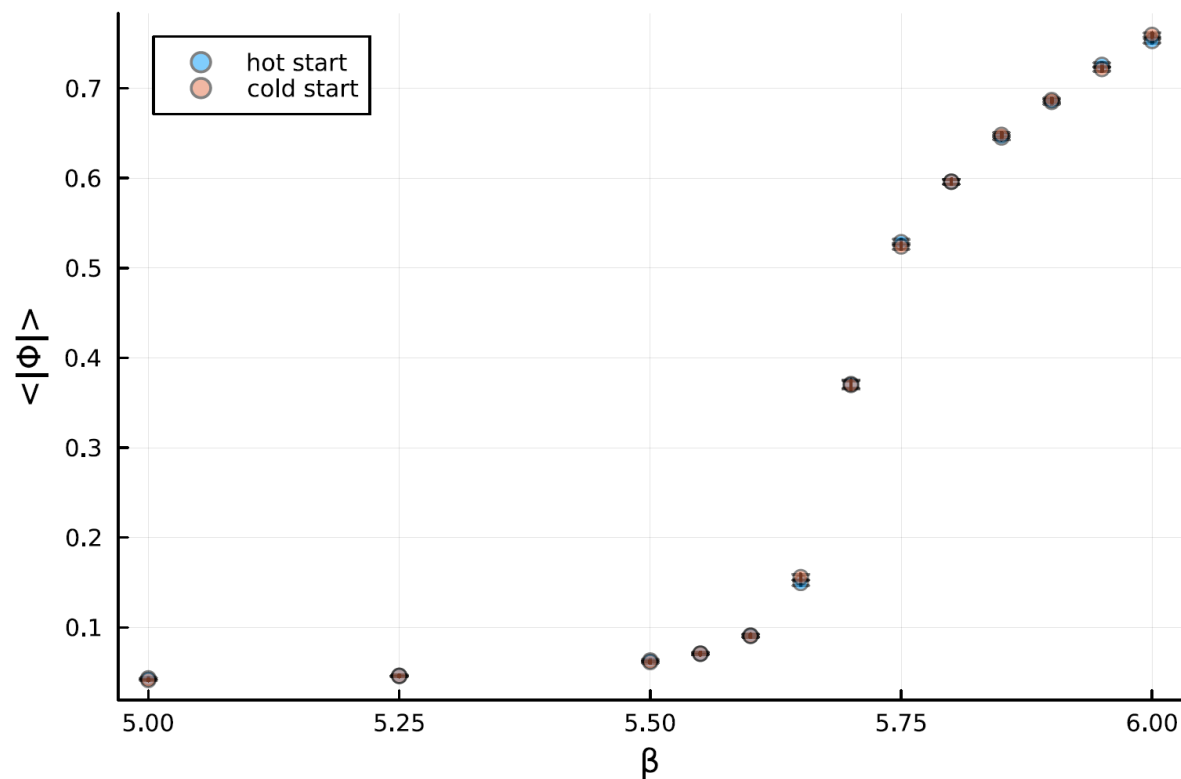
→ 全ての元と可換

Yang-Mills理論 (クエンチ近似の理論) はこの変換で不変 (center対称性)  
 ポリャコフループは不変でない → center対称性の秩序変数  
 (フェルミオン行列式があるとその対称性はあらわに破れる)



# ポリャコフ (Polyakov) ループ (2)

$16^3 \times 4$

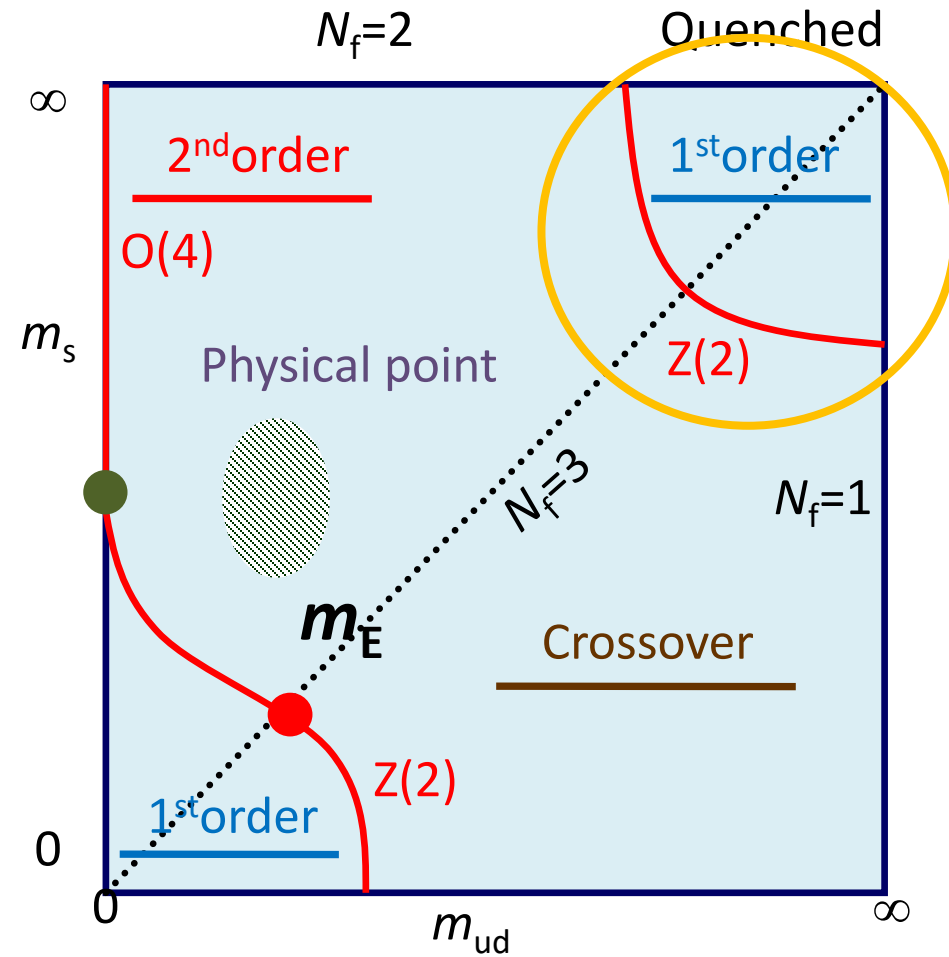


Gaugefields.jl を使って計算

<https://github.com/akio-tomiya/Gaugefields.jl>

サンプルコードを配布したので、計算してみよう！

# 重クォーク領域の臨界終点



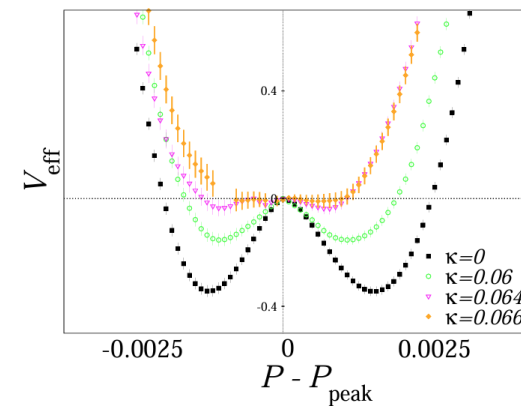
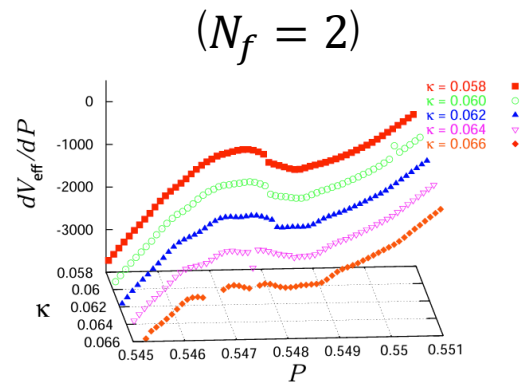
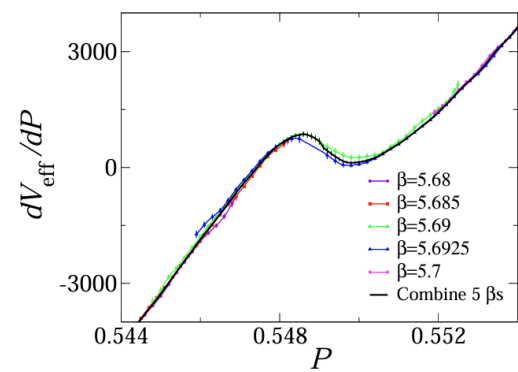
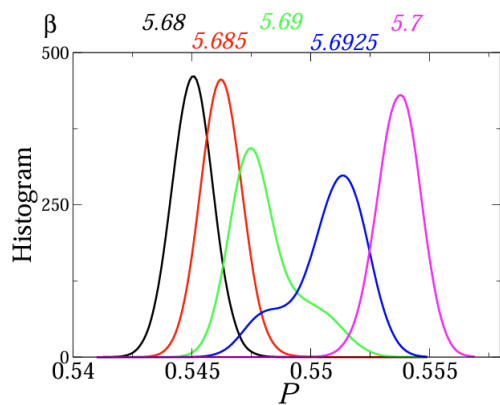
# ヒストグラム法とホッピングパラメタ展開による臨界終点の計算

- Plaquette分布関数と有効ポテンシャル H. Saito *et al.* [WHOT-QCD], Phys. Rev. D 84, 054502 (2011)

$$w(P', \beta, \kappa) = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P' - P) e^{-S_q - S_g} = \int \mathcal{D}U \delta(P' - P) (\det M(\kappa))^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P}$$

$$V_{\text{eff}}(P, \beta, \kappa) = -\ln w(P, \beta, \kappa)$$

- 計算手順  $24^3 \times 4$



$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dP}(P, \beta, \kappa) = \frac{dV_{\text{eff}}}{dP}(P, \beta_0, \kappa) - 6(\beta - \beta_0)N_{\text{site}}$$

$$\ln \left[ \frac{\det M(\kappa)}{\det M(0)} \right] = 288N_{\text{site}}\kappa^4 P + 12 \times 2^{N_t} N_s^3 \kappa^{N_t} \text{Re}\Omega + \dots$$

積分

異なる  $\beta$  のデータを  
組み合わせて滑らかに

ホッピングパラメタ展開  
で有限の  $\kappa$  へ外挿

# ヒストグラム法とホッピングパラメタ展開による臨界終点の計算

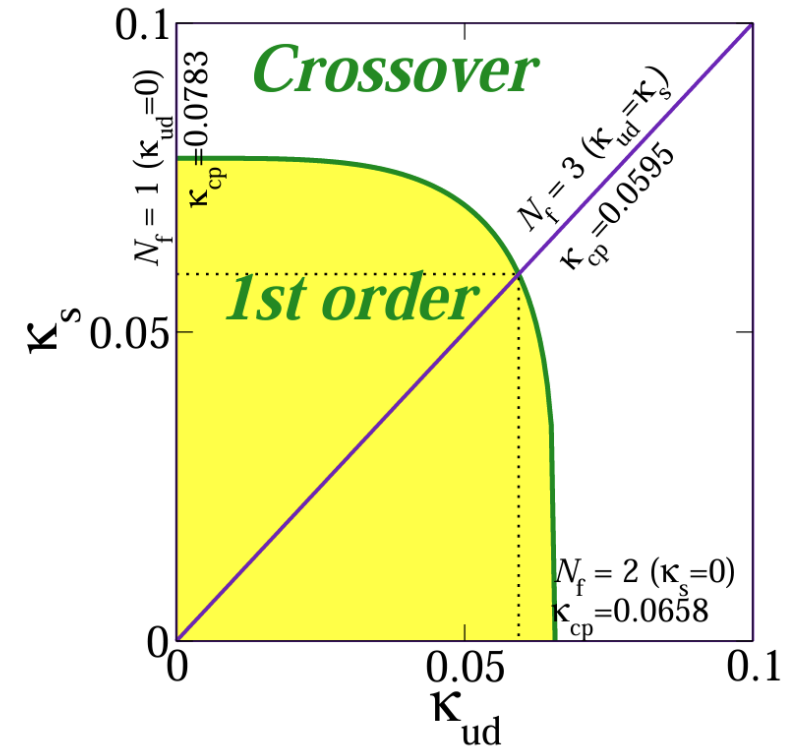
- Plaquette分布関数と有効ポテンシャル H. Saito *et al.* [WHOT-QCD], Phys. Rev. D 84, 054502 (2011)

$$w(P', \beta, \kappa) = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P' - P) e^{-S_q - S_g} = \int \mathcal{D}U \delta(P' - P) (\det M(\kappa))^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P}$$

$$V_{\text{eff}}(P, \beta, \kappa) = -\ln w(P, \beta, \kappa)$$

- 最終結果  $24^3 \times 4$

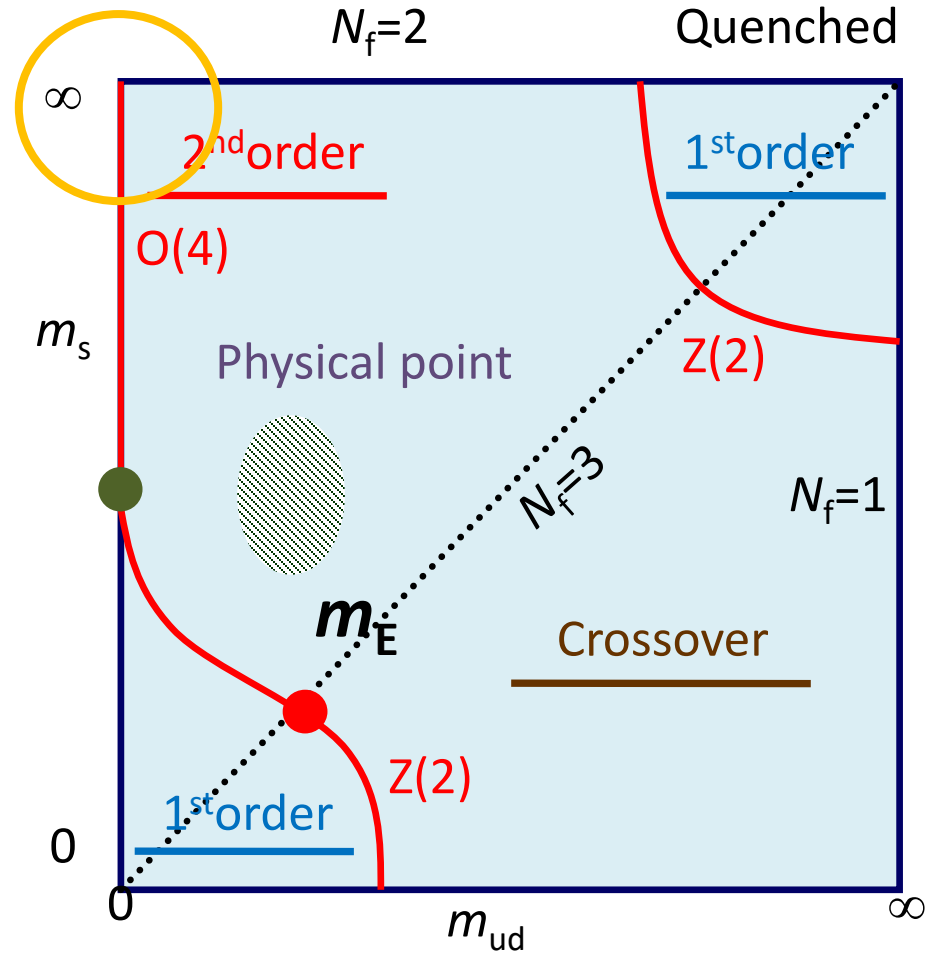
$N_f$	$\kappa_{\text{cp}}$
1	0.0783(4) $\binom{+5}{-13}$
2	0.0658(3) $\binom{+4}{-11}$
3	0.0595(3) $\binom{+4}{-10}$



$N_t = 6$  の結果: R. Ashikawa *et al.*, [arXiv:2407.09156 [hep-lat]].



# 2フレーバQCDのカイラル相転移の次数



# Axial anomaly の有効的回復

- Axial anomaly

$$\partial_\mu J^{\mu 5}(x) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x) \sim \rho_{\text{top}}(x) : \text{topological charge density}$$

- Index theorem

$$Q_{\text{top}} = \int dx \rho_{\text{top}}(x) = n_- - n_+ : \text{left-, right-handed Dirac zero mode の数の差}$$

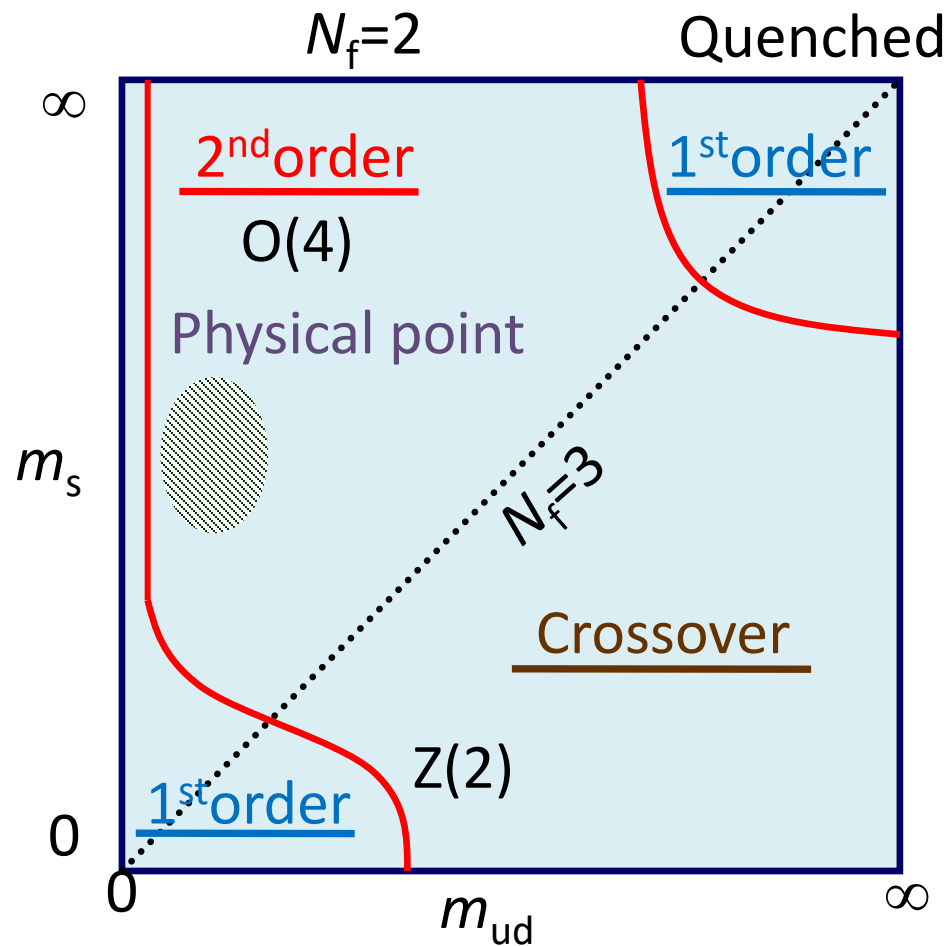
- Instanton density at high temperature

$$n(T) = n(0) \exp(-AT^2) \quad \text{D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe (1981)}$$

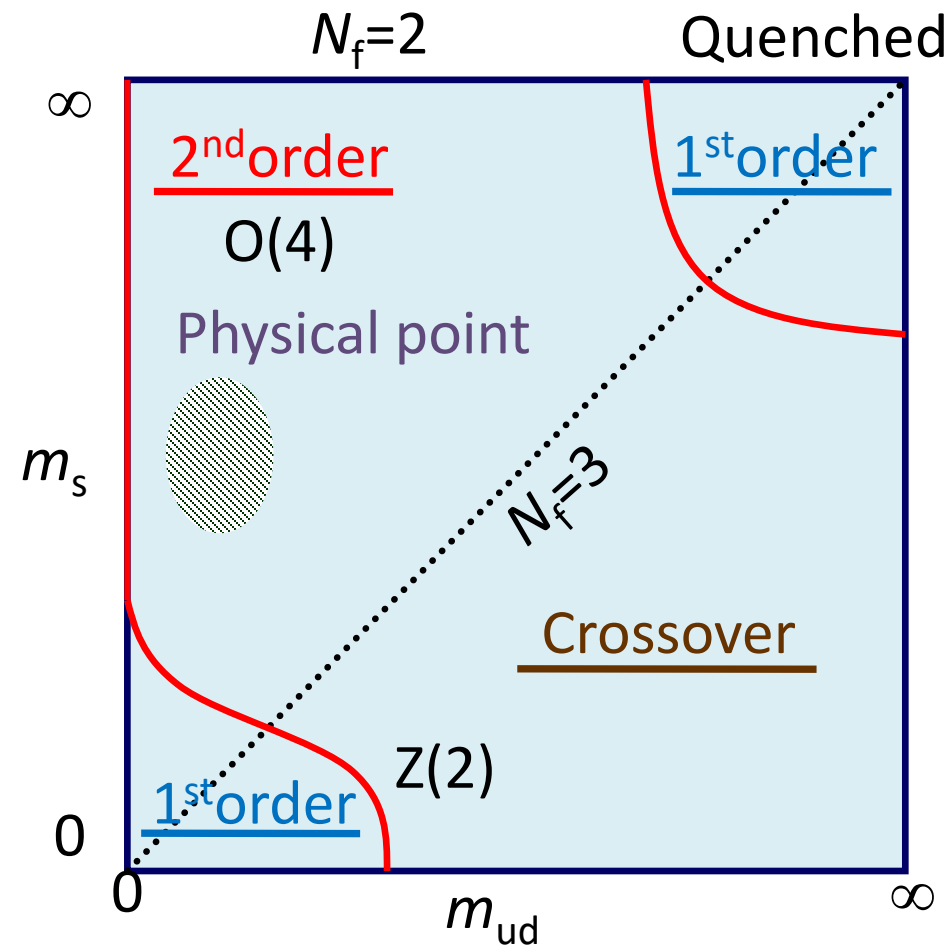
**$U(1)_A$  対称性は  $T \rightarrow \infty$  で回復**

# 可能性のあるパターン

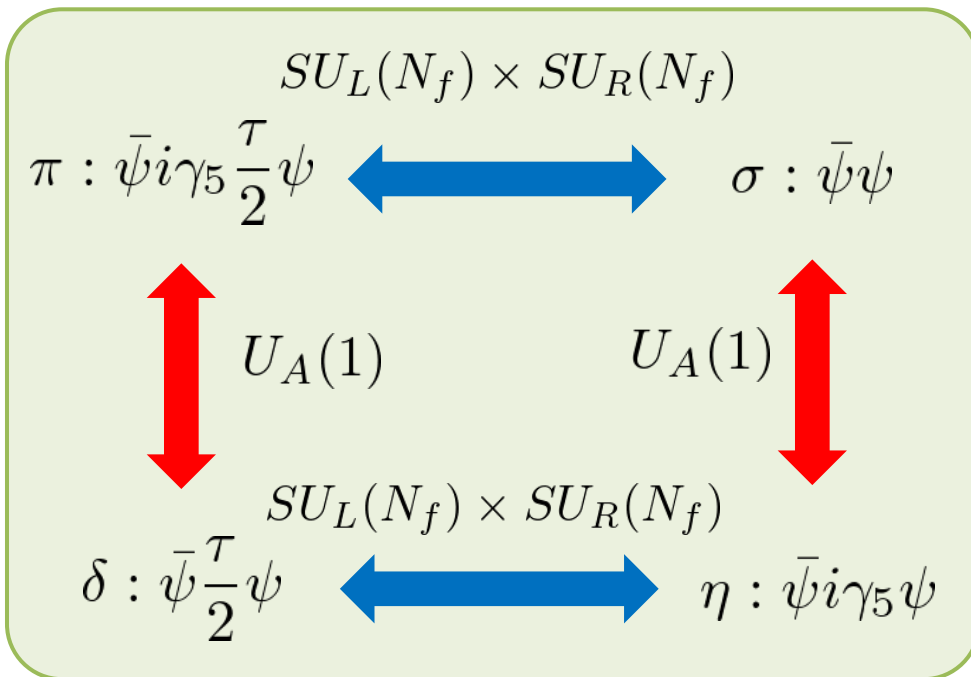
$U(1)_A$  が有効的に回復



$U(1)_A$  が有効的に敗れたまま



# 対称性関係



$$\chi_\pi \equiv \frac{T}{V} \langle \text{Tr}(M^{-1} \gamma_5 M^{-1} \gamma_5) \rangle$$

$$\chi_\delta = \chi_{\text{con}} \equiv \frac{T}{V} \langle \text{Tr}(M^{-1} M^{-1}) \rangle$$

$$\chi_\sigma = \chi_{\text{con}} + \chi_{\text{disc}}$$

$$\chi_{\text{disc}} \equiv \frac{T}{V} [\langle (\text{Tr} M^{-1})^2 \rangle - \langle \text{Tr} M^{-1} \rangle^2]$$

$SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$  restoration

→  $\chi_\pi = \chi_\sigma \rightarrow \chi_\pi - \chi_\delta = \chi_{\text{disc}}$

$U(1)_A$  restoration

→  $\chi_\pi = \chi_\delta \rightarrow \chi_\pi - \chi_\delta = 0$

# ディラック固有値とカイラル対称性

- カイラル凝縮とディラック固有値の関係

$$\Sigma = \int_0^\infty d\lambda \frac{2m\rho(\lambda, m)}{m^2 + \lambda^2}$$

$iD\phi = \lambda\phi$ ,  $\rho(\lambda, m) \equiv \frac{1}{V} \langle \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k(m)) \rangle$  : 固有値密度

- Banks-Casher 関係式

$$m \rightarrow \infty, V \rightarrow 0 \quad \Sigma = \pi\rho(0)$$

T. Banks and A. Casher (1980)

$$T < T_c \quad \Sigma \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \rho(0) \neq 0$$

$$T > T_c \quad \Sigma = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho(0) = 0$$

相転移が連続的ならば、  
 $\rho(0) \rightarrow 0$  as  $T \rightarrow T_c$

# ディラック固有値と $U(1)_A$ 対称性

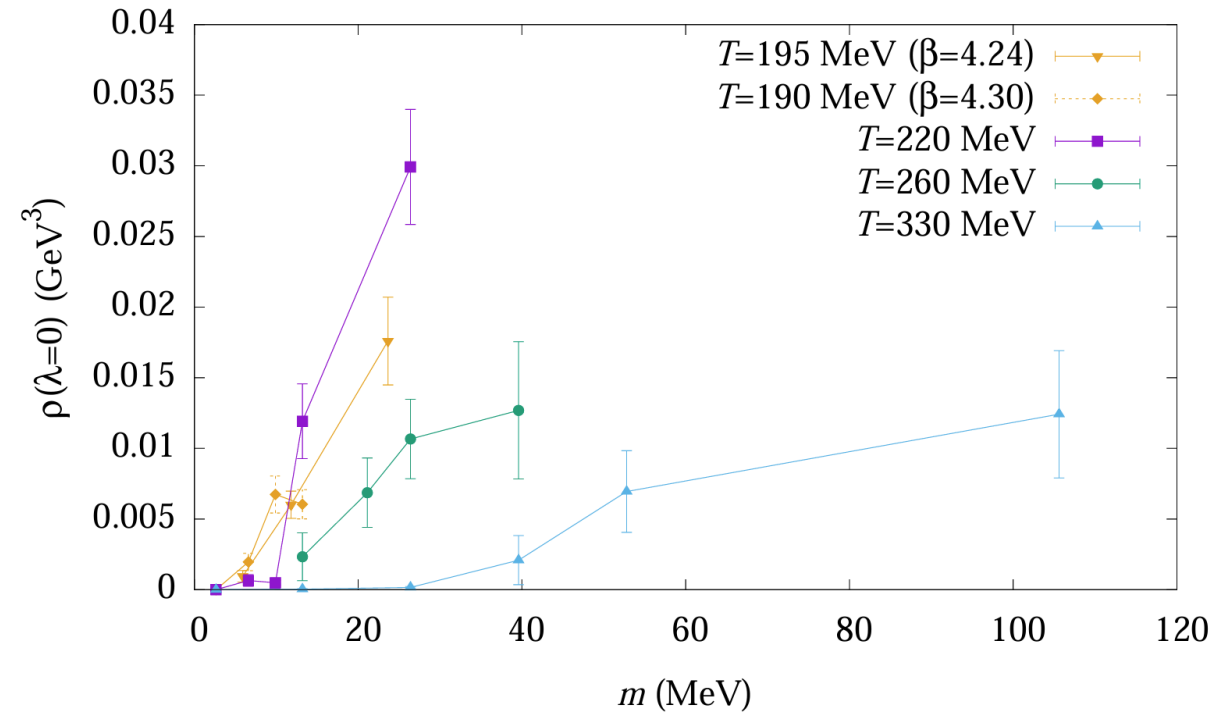
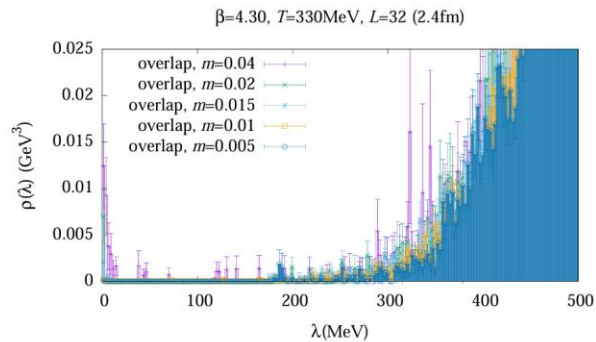
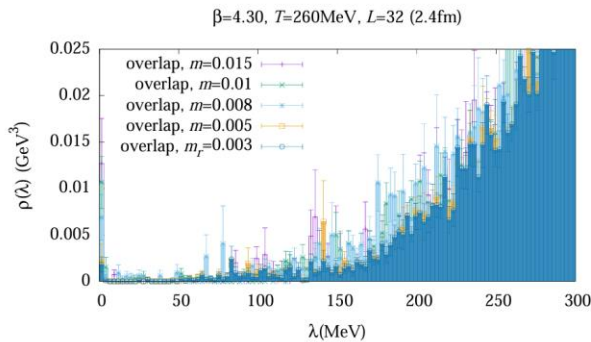
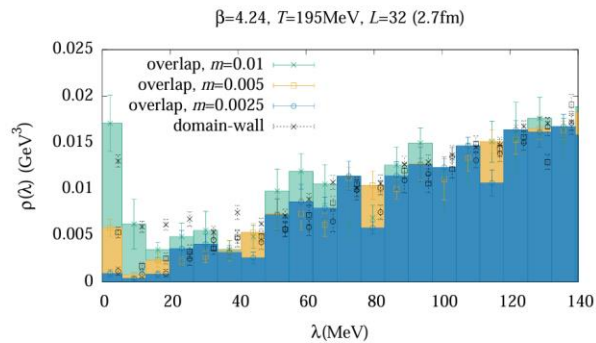
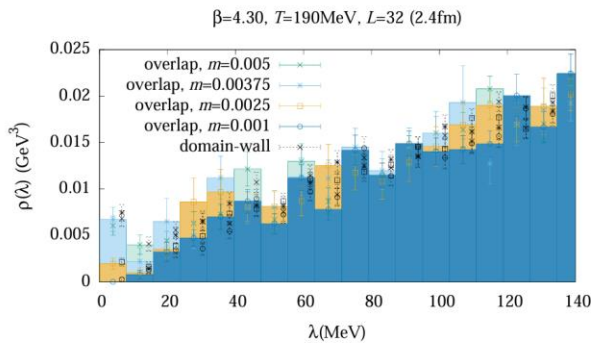
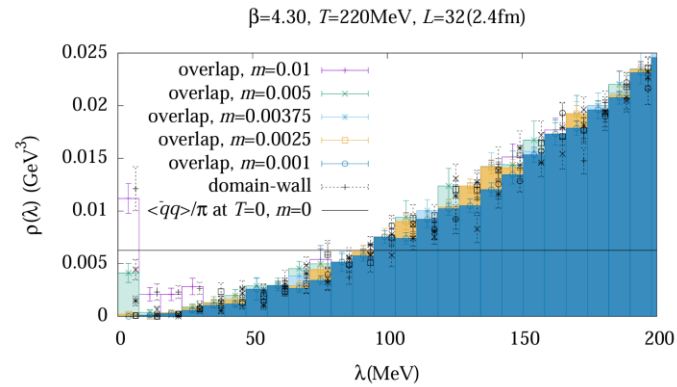
- $U(1)_A$  の破れを測る量

$$\chi_\pi - \chi_\delta = \int_0^\infty \frac{4m^2 \rho(\lambda, m)}{(\lambda^2 + m^2)^2} d\lambda$$

- 相転移温度以上で期待される  $\rho(\lambda \rightarrow 0, m \rightarrow 0)$  の振る舞い
  - $\rho(\lambda, m)$  がギャップを持つ
    - $\Sigma = 0, \chi_\pi - \chi_\delta = 0$
    - $U_A(1)$  対称性の有効的回復
  - $\rho(\lambda, m) \sim m^2 \delta(\lambda)$  or  $\sim \lambda$  or  $\sim m$ 
    - $\Sigma = 0, \chi_\pi - \chi_\delta$  : 有限
    - $U_A(1)$  対称性が破れたまま

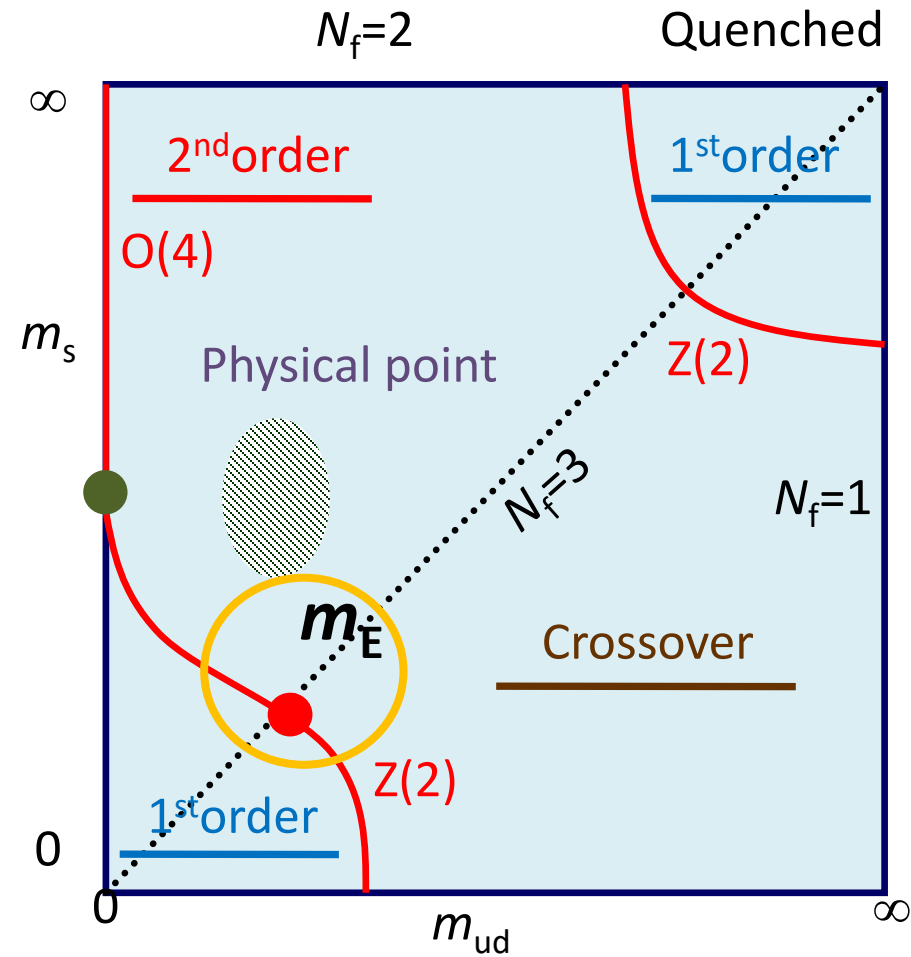
# ドメインウォール・オーバーラップフェルミオンの結果

S. Aoki *et al.* [JLQCD], Phys. Rev. D 103, no.7, 074506 (2021).



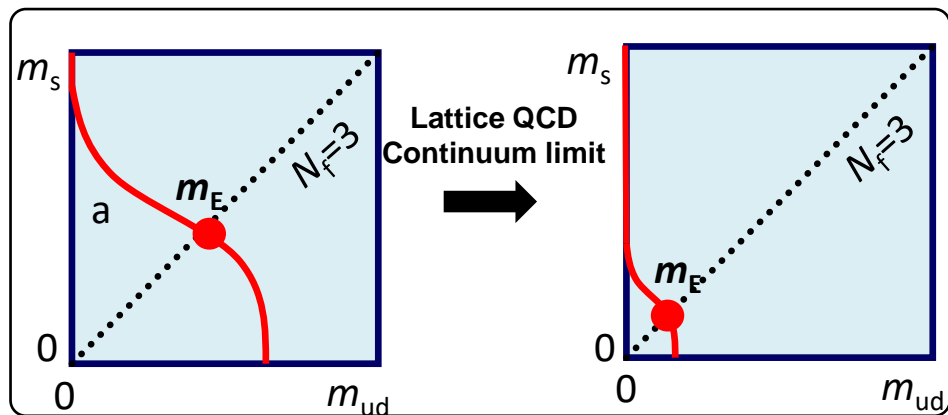


# 3フレーバQCDの臨界終点



# これまでの格子QCD計算結果

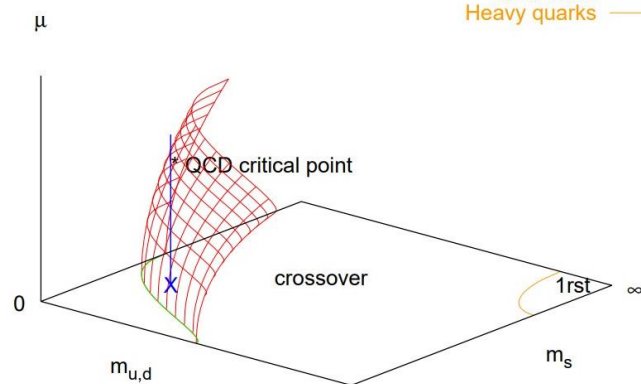
- 連続極限に近づくほど  $m_E$  は小さくなる
- 格子フェルミオンの種類によって結果が大きく異なる



時間方向の格子サイズ  
大きいほど連続極限に近い

臨界終点における  
 $\pi$  中間子質量

Action	$N_t$	$m_\pi^E$	Ref.
Staggered, standard	4	290 MeV	Karsch et al '01, Liao '01
Staggered, p4	4	67 MeV	Karsch et al '04
Staggered, standard	6	150 MeV	de Forcrand et al '07
Staggered, HISQ	6	< 50 MeV	Ding et al '17
Staggered, stout	4-6	$\sim 0$	Varnhorst '14
Wilson, standard	4	< 670 MeV	Iwasaki et al, '96
Wilson, clover	6-8	300 MeV	Nakamura et al, '14
Wilson, clover	4-10	< 170 MeV	Jin et al, '17



O. Philipsen, Eur. Phys. J. ST **152** (2007) 29

# 臨界終点の決定法: 有限サイズスケーリング

- 自由エネルギーの格子サイズに対するスケーリング

$$F(t, h, L^{-1}) = F(tL^{y_t}, hL^{y_h}, 1)$$

$t$ : reduced temperature  $\frac{T - T_c}{T_c}$

$h$ : 外部磁場

$L$ : 格子サイズ

- 尖度 (Kurtosis)

$$\begin{aligned} K_M(t, 0, L^{-1}) &= \frac{\frac{\partial^4}{\partial h^4} F(t, 0, L^{-1})}{\left[ \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(t, 0, L^{-1}) \right]^2} \\ &= \frac{\frac{\partial^4}{\partial h^4} F(tL^{y_t}, 0, 1)}{\left[ \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(tL^{y_t}, 0, 1) \right]^2} \end{aligned}$$

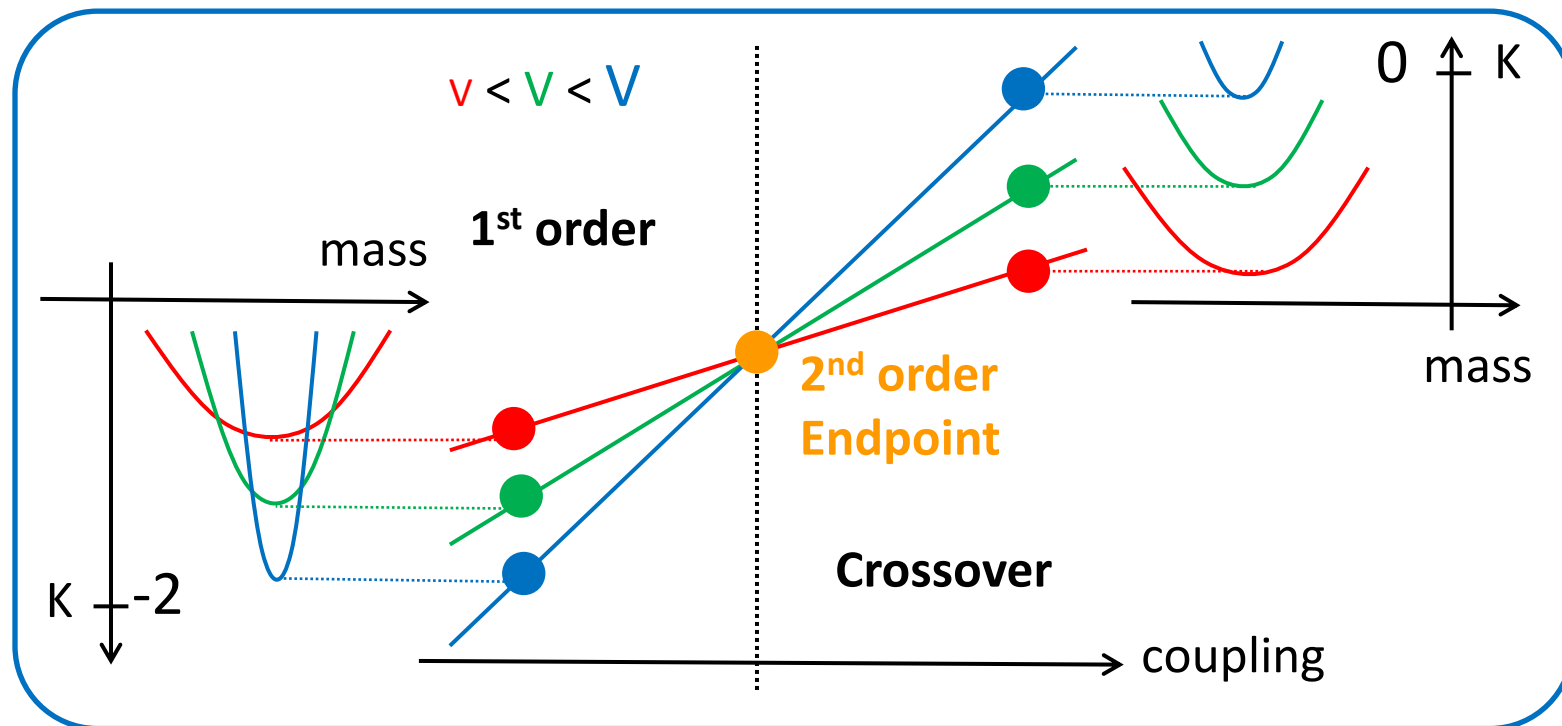
Cf. Binder cumulant:  $B_4 = 1 - \frac{1}{3}K$

→  $tL^{y_t}$  が小さいとき

$$K_M(t, 0, L^{-1}) = \frac{\frac{\partial^4}{\partial h^4} F(0, 0, 1)}{\left[ \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(0, 0, 1) \right]^2} + c_K t L^{1/\nu} + O((tL^{1/\nu})^2)$$

$1/\nu = y_t$

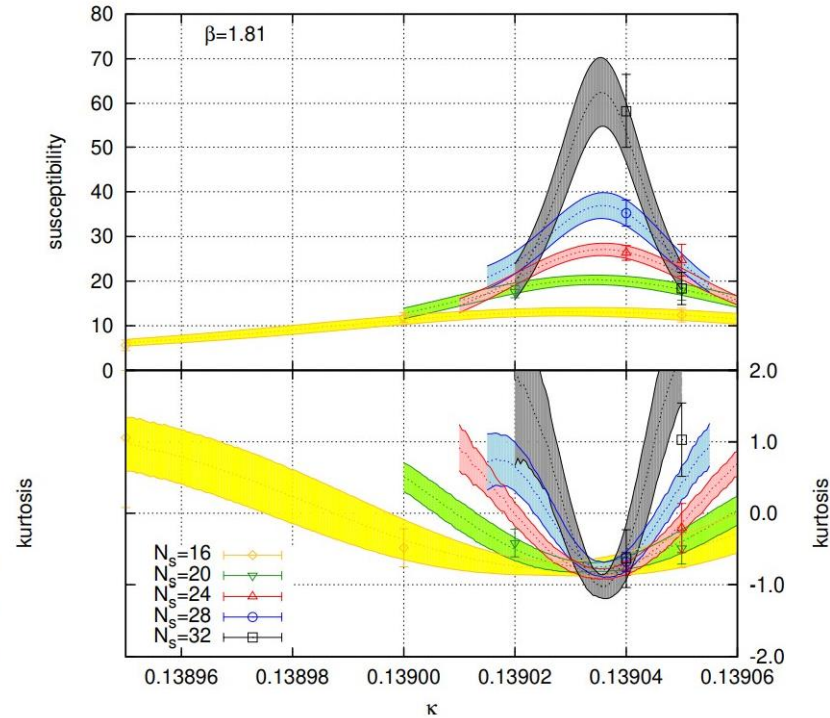
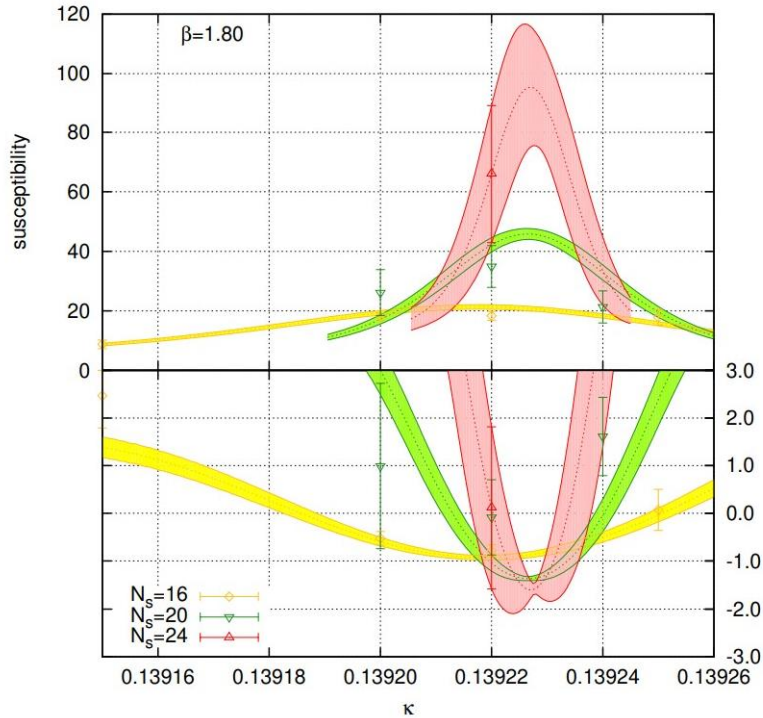
# 尖度交差法



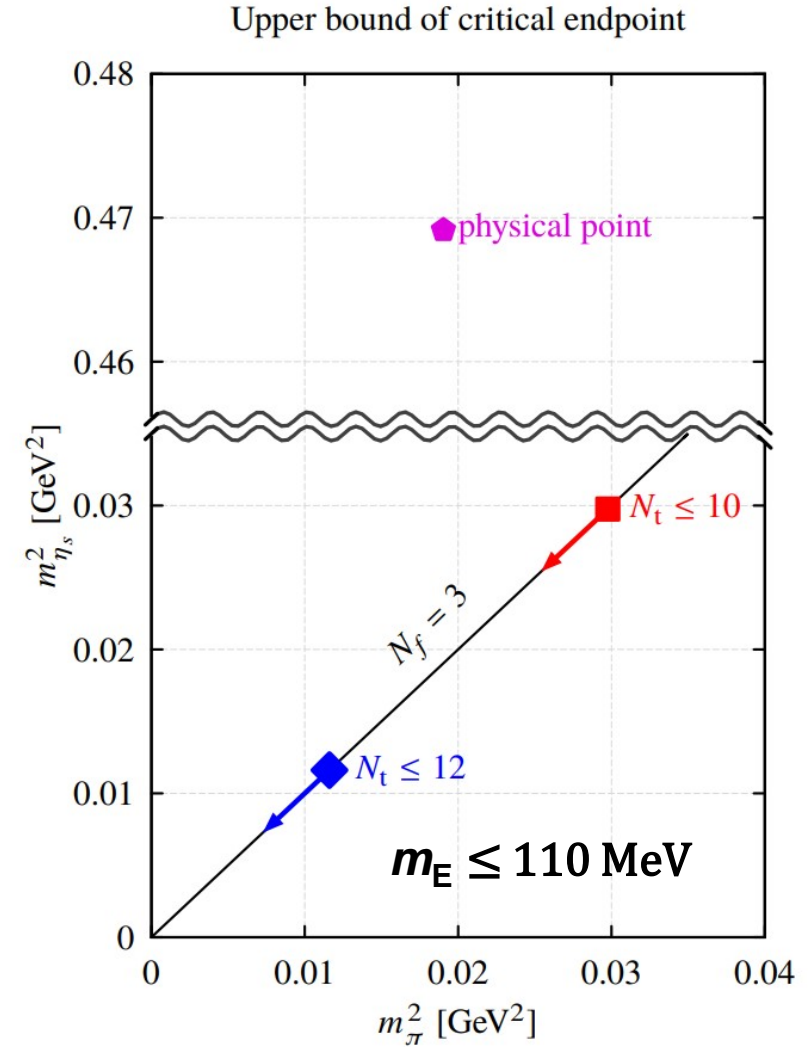
臨界終点では尖度の体積依存性が無い  
→ 様々な体積で尖度を計算し、交点を求める

# Wilson Cloverフェルミオンの結果

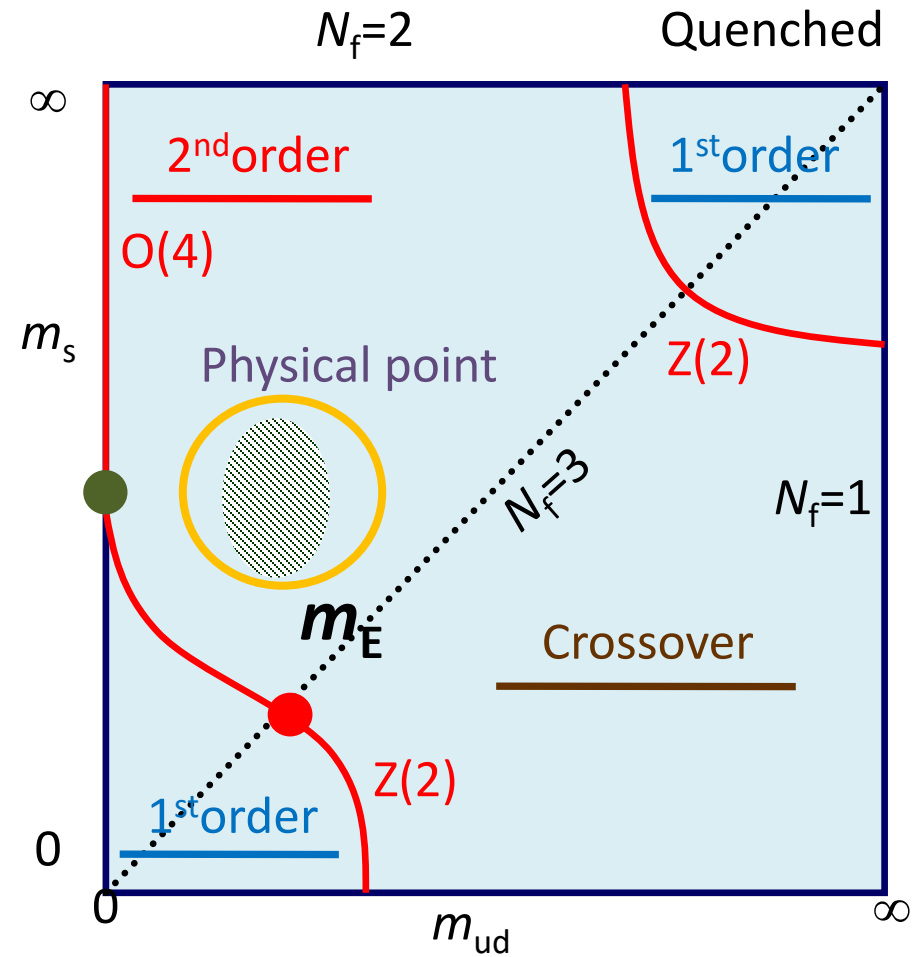
Y. Kuramashi, Y. Nakamura, HO and S. Takeda, Phys. Rev. D **101** (2020) 5, 054509



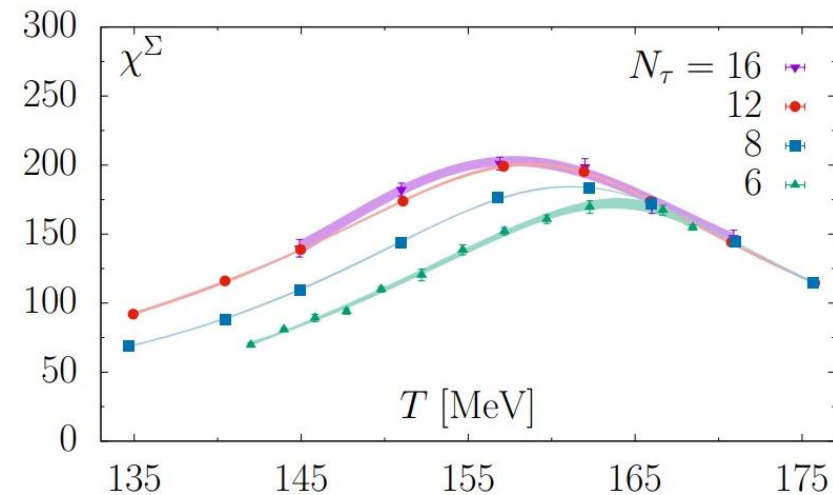
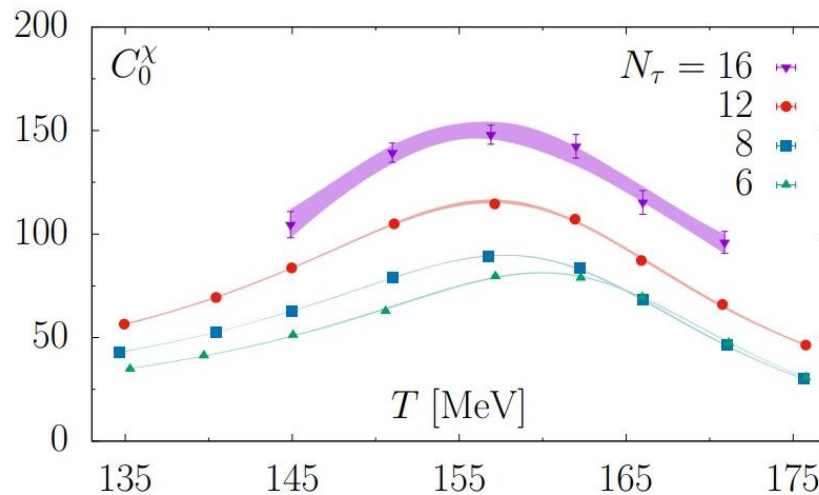
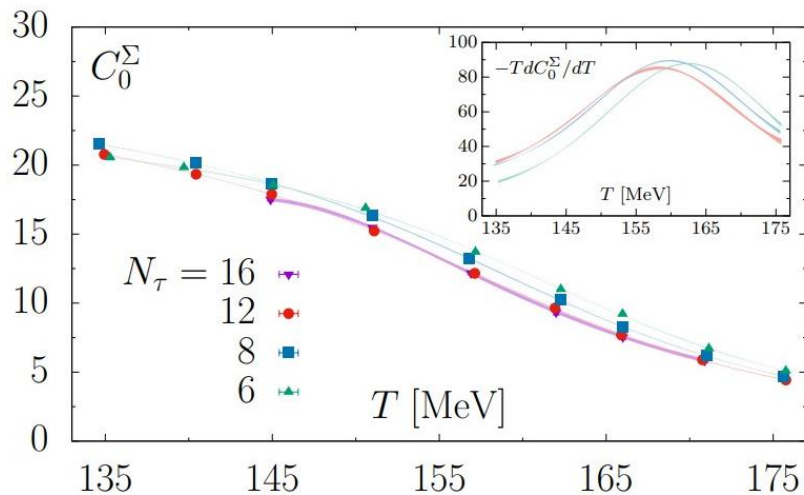
$\kappa$  : ホッピングパラメタ  $\sim 1/m$



# 物理点での計算



# クロスオーバー温度の計算

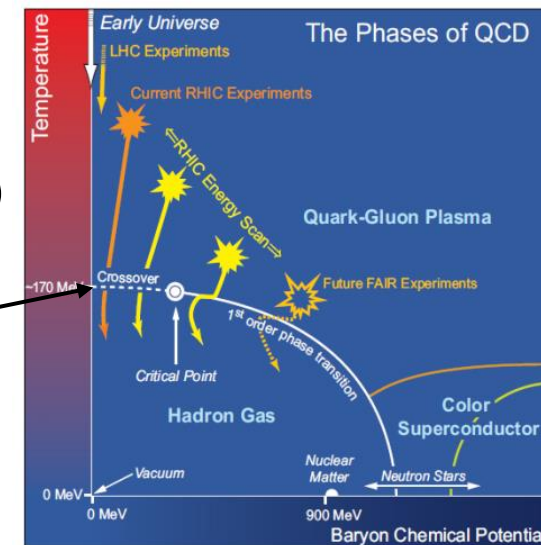


HotQCD Collaboration, Phys.Lett.B 795 (2019) 15-21

- カイラル凝縮  $\Sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$  とその感受率  $\chi_\Sigma$  を計算
  - $\Sigma$  : カイラル対称性に対する秩序変数 (オーダーパラメータ)
  - カイラル対称性あり  $\Sigma = 0$ 、カイラル対称性の破れ  $\Sigma \neq 0$

$$T_c = 156.5 \pm 1.5 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ MeV} = 1.16045 \times 10^{10} \text{ K}$$





# 状態方程式

- エネルギー密度

$$\epsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln Z(V, T)}{\partial T} \Bigg|_V$$

- 圧力

$$p = \frac{T \partial \ln Z(V, T)}{\partial V} \Bigg|_T$$

- Interaction measure/Trace anomaly

$$I = \epsilon - 3p$$

- エントロピー密度

$$s = \frac{\epsilon + p}{T}$$

# 微分法

- 温度と体積についての微分をするため、非等方格子が必要

- 非等方パラメータ:  $\xi$

- 格子間隔:  $a_s = \xi a_t = a$

- $T \frac{\partial}{\partial T} \Big|_V = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_a, 3V \frac{\partial}{\partial V} \Big|_T = a \frac{\partial}{\partial a} \Big|_\xi + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_a$

- Plaquette ゲージ作用 (ここではPureゲージだけ考える)

- $S_g[U] = \sum_{x\mu\nu} \frac{1}{g^2 a^4} \text{tr}\{1 - \text{Re}U_{\mu\nu}(x)\} = 6N_c N_s^3 N_t [\kappa_s P_s + \kappa_t P_t]$

- $P_{\mu\nu}(x) = 1 - \frac{\text{Re} \text{tr} U_{\mu\nu}(x)}{N_c}, P_s = \sum_{x,i < j, j=1}^3 \frac{P_{ij}(x)}{3N_s^3 N_t}, P_t = \sum_{x,i=1}^3 \frac{P_{0i}(x)}{3N_s^3 N_t}$

- $\kappa_s = \frac{1}{\xi g_s^2}, \kappa_t = \frac{\xi}{g_t^2}$  Karsch 係数

- $g_i^{-2}(a, \xi) = g_i^{-2}(a) + c_i(\xi) + O(g^2(a))$

この展開が非物理的結果 (負の圧力) を与えることが判明

- $a \frac{\partial \kappa_s}{\partial a} = \frac{a}{\xi} \frac{\partial g_s^{-2}}{\partial a}, \frac{\partial \kappa_s}{\partial \xi} = -\frac{g_s^{-2}}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial c_s}{\partial \xi}, a \frac{\partial \kappa_t}{\partial a} = a \xi \frac{\partial g_t^{-2}}{\partial a}, \frac{\partial \kappa_t}{\partial \xi} = -g_t^{-2} + \xi \frac{\partial c_t}{\partial \xi}$  の計算が必要

- $g_i^{-2}$  の微分の計算には  $\beta$  関数が必要

# 積分法

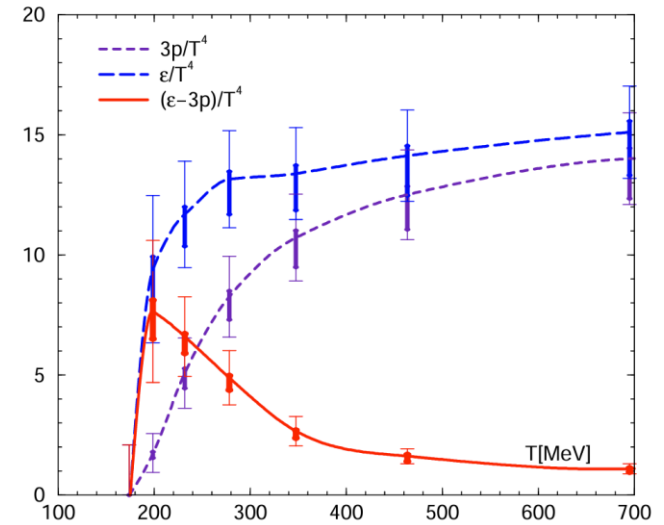
- 圧力

- $p = \frac{T}{V} \ln Z(T, V)$

- $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = S_G[U] = 3N_s^3 N_t [P_s + P_t]$

- $\rightarrow \frac{p}{T^4} \Big|_{\beta} - \frac{p}{T^4} \Big|_{\beta_0} = -3N_t^4 \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta' [\langle P_s(\beta') \rangle - \langle P_t(\beta') \rangle]$

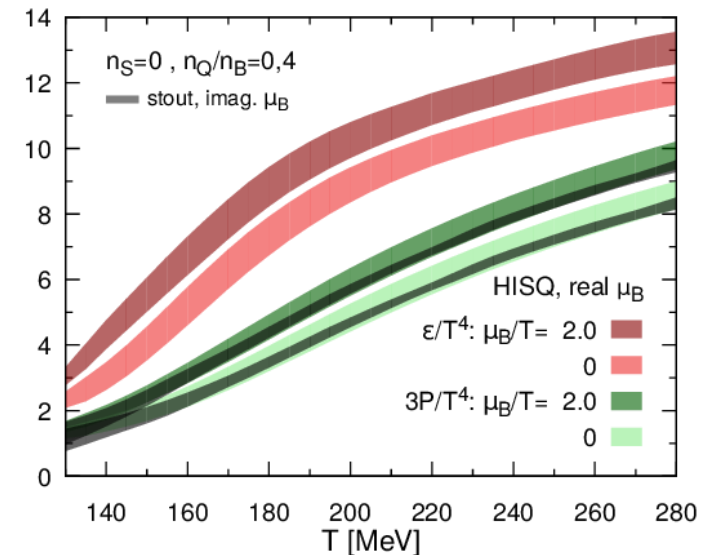
T. Umeda *et al.* [WHOT-QCD],  
Phys. Rev. D 85, 094508 (2012)



- Interacting measure

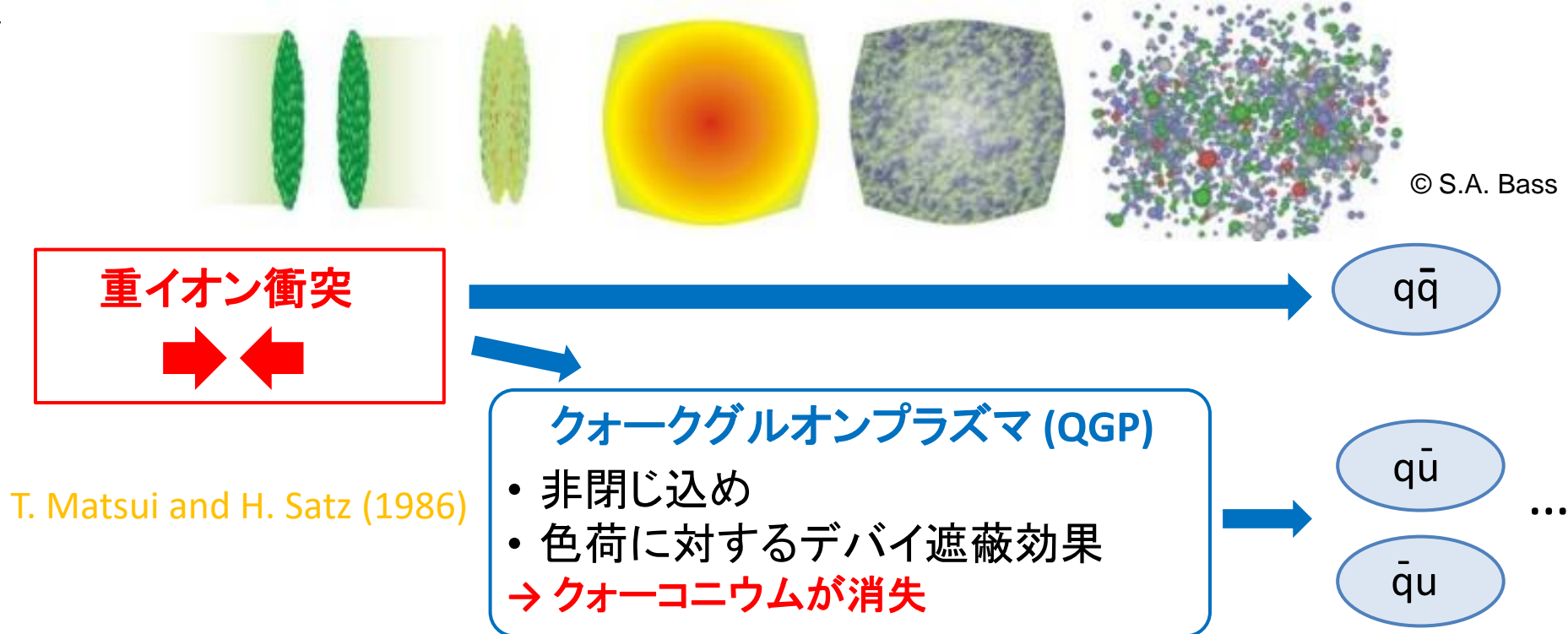
- $\frac{I}{T^4} = \frac{\epsilon - 3p}{T^4} = T \frac{\partial \left( \frac{p}{T^4} \right)}{\partial T} \Big|_V = N_t^4 \left( a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) [P_s + P_t]$

HotQCD Collaboration,  
Phys. Rev. D 95 (2017) 5, 054504



# QGPとクォーコニウム

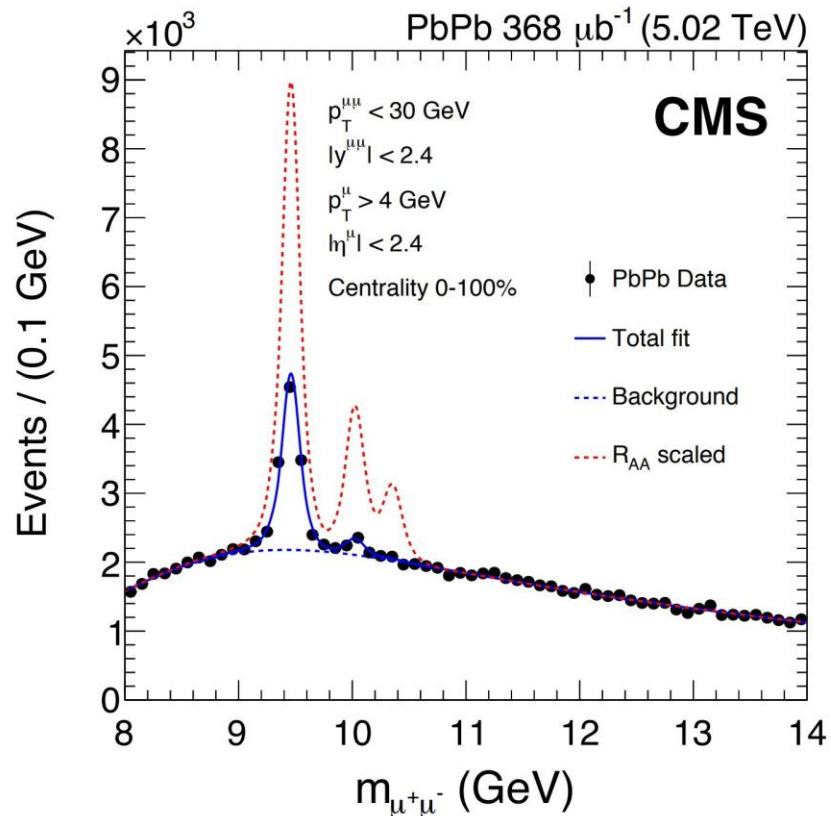
- クォーコニウム ( $n_c, J/\Psi, \chi_c, n_b, Y, \chi_b \dots$ )
  - 重いクォーク (c, b クォーク) とその反クォークの束縛状態
  - 重イオン衝突の早い段階で生成 → QGPの生成からハドロンへの再凝縮に至るすべての過程を経験



T. Matsui and H. Satz (1986)

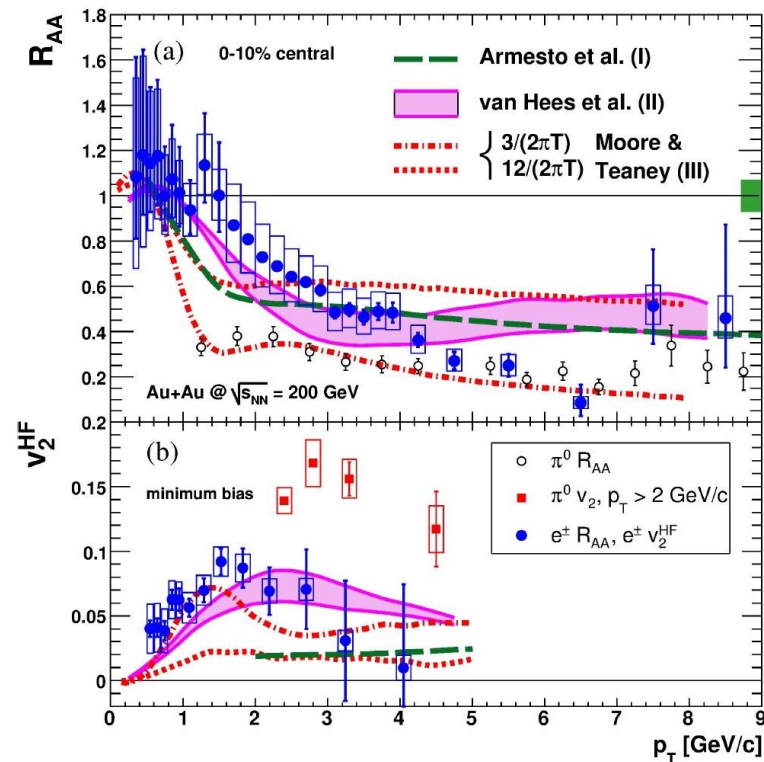
- 重イオン衝突実験において生成される QGP の性質を調べる上で重要な粒子

# 高温媒質中のクォークコニウム及び重クォークの性質の理解



CMS Collaboration@QM2018

クォークコニウムの種類ごとに異なる束縛エネルギー  
 → 異なる消失温度 → QGP温度計



PHENIX Collaboration, PRL 98 (2007) 172301

重クォークの流体力学的性質 (輸送係数)  
 → 流体モデルに対する重要なインプット

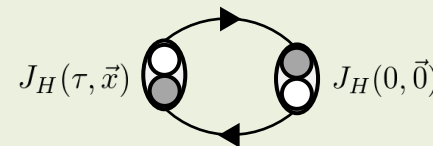
# 相関関数とスペクトル関数

クォークコニウム相関関数 ← 格子QCD計算で計算可能

$$G_H(\tau, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle J_H(\tau, \vec{x}) J_H(0, \vec{0}) \rangle \quad J_H(\tau, \vec{x}) \equiv \bar{\psi}(\tau, \vec{x}) \Gamma_H \psi(\tau, \vec{x})$$

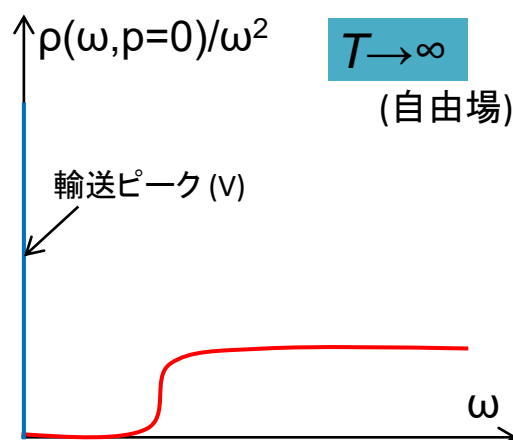
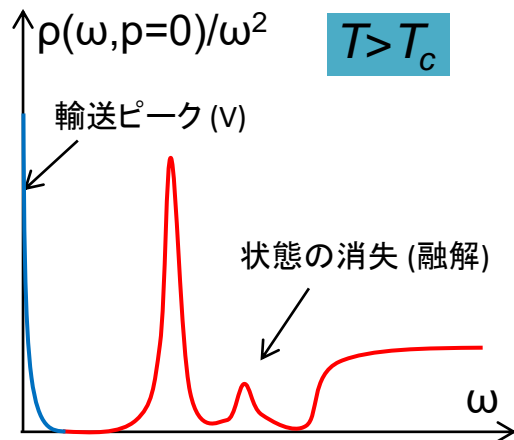
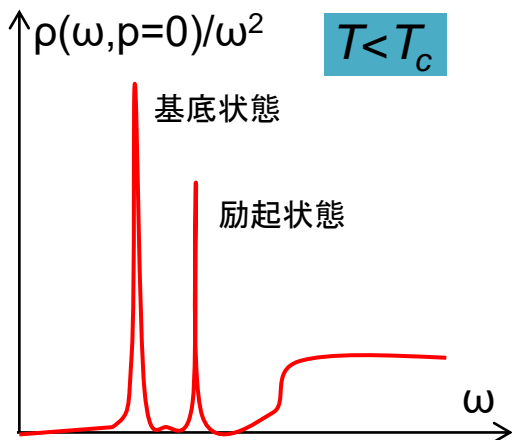
$$= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \rho_H(\omega, \vec{p}) K(\omega, \tau)$$

$$K(\omega, \tau) \equiv \frac{\cosh[\omega(\tau - 1/2T)]}{\sinh(\omega/2T)}$$



スペクトル関数 → 高温媒質中のクォークコニウムの情報を含む

$T_c$ : 相転移温度



重クォーク拡散定数

$$D = \frac{1}{6\chi_{00}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_{ii}^V(\omega, \mathbf{0})}{\omega}$$

$\rho_{ii}^V$ : ベクタースペクトル関数  
 $\chi_{00}$ : クォーク数感受率

# スペクトル関数計算の困難

- 典型的な ill-posed 問題
  - 相関関数からスペクトル関数への逆問題を解く必要がある
  - (格子QCDで得られる相関関数のデータ点数)
    - ◀ (スペクトル関数を表現するために必要な自由度の数)
  - 単純な  $\chi^2$  フィットはうまくいかない
  - 何かしら事前にわかっている情報が必要
  - 最大エントロピー法などのBayes推定法
  - スパースモデリング
  - ...



# 最大エントロピー法

- 次の条件付確率を最大化する解を見つける

M. Asakawa, T. Hatsuda and Y. Nakahara,  
Prog.Part.Nucl.Phys. 46 (2001) 459-508

$$P[A|\bar{G}] \propto e^{-F} \quad \max P[A|\bar{G}] \leftrightarrow \min F \leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta A} = 0$$

$$F \equiv \chi^2/2 - \alpha S$$

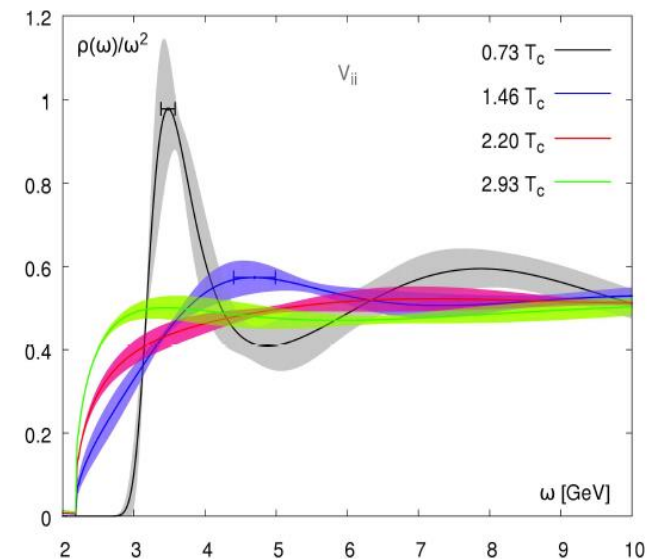
$$S \equiv \int_0^\infty d\omega \left[ A(\omega) - D(\omega) - A(\omega) \ln \left( \frac{A(\omega)}{D(\omega)} \right) \right]$$

$D(\omega)$ : Default model (事前知識)

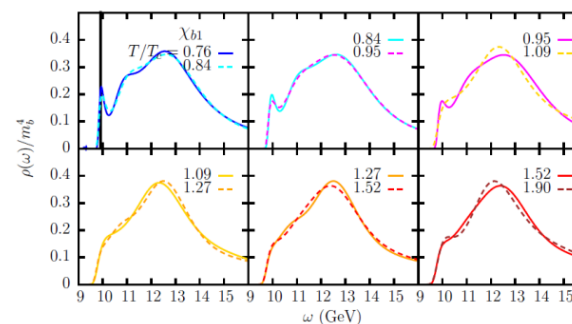
: Shannon-Jaynes entropy

# クォークoniumの消失温度

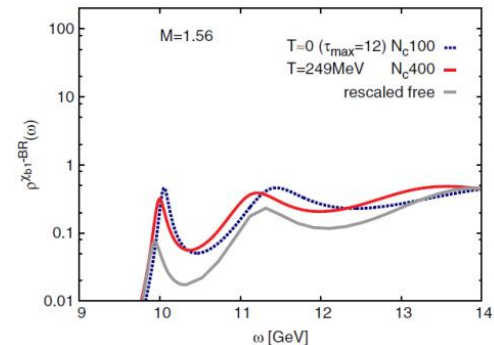
- チャーモニウム
  - 様々なグループが計算しているが、消失温度に関する最終的な結論は得られていない
  - $J/\psi$  粒子は相転移温度の1.5倍の温度でも存在？
- ボトモニウム
  - $Y(1S)$  状態は相転移温度の2倍の温度でも存在しているように見える



H.-T. Ding *et al.*, PRD **86** (2012) 014509



G. Aarts *et al.*, JHEP **1407** (2014)097



S. Kim *et al.*, Phys Rev D **91**, 054511

# 拡散係数

- Perturbative estimate

$$2\pi DT \approx 71.2 \text{ in LO}$$

Moore and Teaney, PRD **71** (2005) 064904

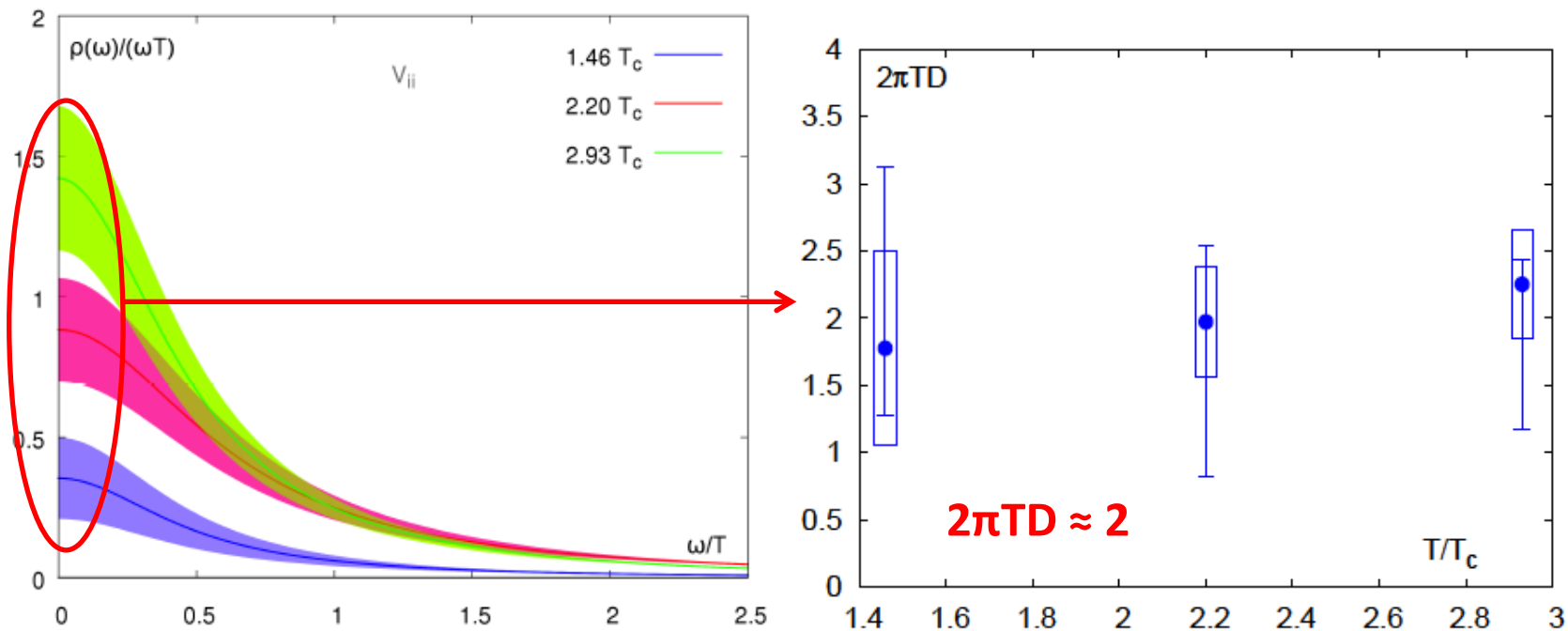
$$2\pi DT \approx 8.4 \text{ in NLO}$$

Caron-Hout and Moore, PRL **100** (2008) 052301

- Strong coupling limit

$$2\pi DT \approx 1$$

Kovtun, Son and Starinets, JHEP **0310** (2004) 064



H.-T. Ding *et al.*, PRD **86** (2012) 014509

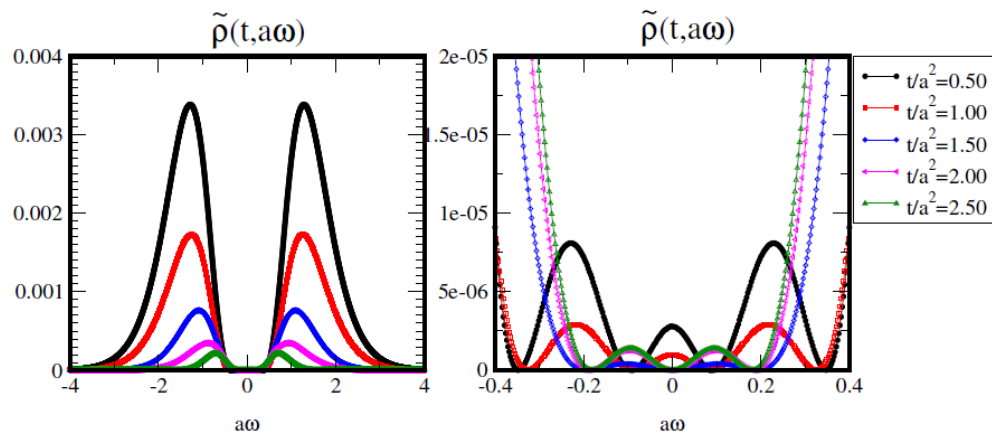
# スパースモデリング

- L1正則化 → スパースな（自由度が少ない）解を見つける

$$F(\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}' - S\boldsymbol{\rho}'\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\rho}'\|_1$$

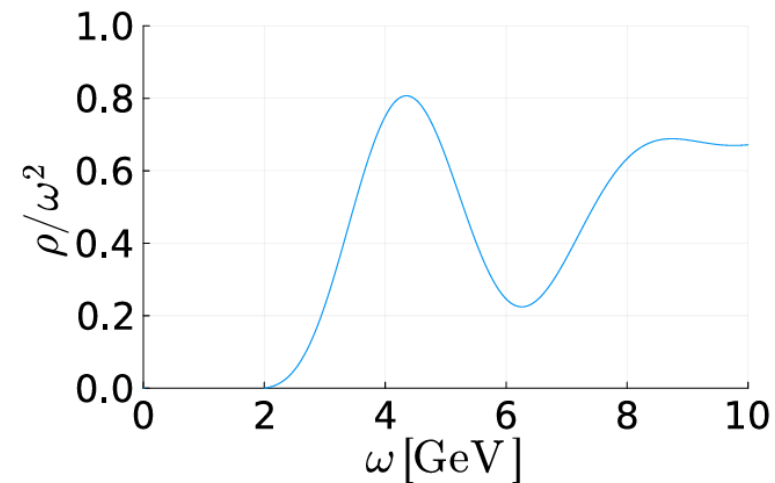
$$\text{L1 norm: } \|\boldsymbol{\rho}'\|_1 \equiv \sum_l |\rho'_l|$$

エネルギー・運動量テンソルの相関関数への応用  
(QGPの粘性の計算)



E. Itou, Y. Nagai, J. High Energy. Phys. 2020, 7 (2020)

チャーモニウム相関関数への応用



J. Takahashi, HO and A. Tomiya, PoS LATTICE2023, 028 (2024)

# 参考文献

- 有限温度のことが書いてある格子QCDの教科書
  - H. J. Rothe, “LATTICE GAUGE THEORIES An Introduction,” World Scientific
  - C. Gattringer and C. B. Lang, “Quantum Chromodynamics on the Lattice,” Springer
- 相転移・臨界現象の教科書
  - 高橋和孝、西森秀稔「相転移・臨界現象と繰り込み群」、丸善出版
- 重イオン衝突実験との関連についての教科書
  - C. Ratti, R. Bellwied, “The Deconfinement Transition of QCD,” Springer
  - 北沢正清・国広悌二「超高温・高密度のクォーク物質」、共立出版
- 最近のレビュー
  - G. Aarts *et al.*, “Phase Transitions in Particle Physics: Results and Perspectives from Lattice Quantum Chromo-Dynamics,” Prog. Part. Nucl. Phys. 133, 104070 (2023)
- 有限密度 (この講義では取り上げる時間がありませんでした。)
  - 永田桂太郎「有限密度格子QCDと符号問題研究の現状と課題」素粒子論研究 31, 1 (2020).