格子ゲージ理論(作用の紹介)

筑波大学 山﨑 剛

ゲージ理論作用ユークリッド化

ゲージ理論作用格子化

最も単純な格子ゲージ作用　U(1)ゲージ理論
SU(3)ゲージ理論

最も単純な格子フェルミオン作用　ダブリング問題

参考書

「Lattice gauge theories An Introduction」, H. J. Rothe, World Scientific

「Quantum Chromodynamics on the Lattice」, C. Gattringer and C. B. Lang, Springer

「Lattice methods for Quantum Chromodynamics」, T. Degrand and C. DeTar, World Scientific

「Quantum Fields on a Lattice」, I. Montvay and G. Münster, Cambridge University Press

「格子上の場の理論」, 青木慎也, シュプリンガー

格子上の場の理論 夏の学校2024 @ 筑波大学東京キャンパス

格子ゲージ理論作用

$$
\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi} O(U,\overline{\psi},\psi) e^{-\overline{\psi}D[U]\psi} &= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi} O(U,-\frac{\delta}{\delta J},\frac{\delta}{\delta \overline{J}}) e^{-\overline{\psi}D[U]\psi+\overline{J}\psi+\overline{\psi}J}\Big|_{\overline{J}=J=0} \\
&= O(U,-\frac{\delta}{\delta J},\frac{\delta}{\delta \overline{J}}) \det[D[U]] e^{\overline{J}D^{-1}[U]J}\Big|_{\overline{J}=J=0} \\
&= \det[D[U]] O(U, D^{-1}[U])
\end{aligned}
$$

渡辺さん講義参照

物理量期待値　U: リンク変数≈ゲージ場

$$
\begin{aligned}
\langle O(U,\psi,\overline{\psi})\rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\; O(U,\overline{\psi},\psi) e^{-(S_g+S_f)} \\
&= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U \det[D[U]]\; O(U, D^{-1}[U]) e^{-S_g} \\
&= \frac{1}{N}\sum_i O(U_i, D^{-1}[U_i]) + \text{統計誤差}
\end{aligned}
$$

$$
Z = \int \mathcal{D}U\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\; e^{-(S_g+S_f)} \qquad S_f = \overline{\psi}D[U]\psi
$$

ゲージ理論作用 S_g, S_f はモンテカルロシミュレーションの
確率分布と物理量の両方の計算で重要な役割

Minkowski座標　非可換ゲージ作用

$$S = \int d^4x \, (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f)$$

ゲージラグランジアン

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)) = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu,a}(x)\right)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] \\ &= F^a_{\mu\nu}(x)T^a \end{aligned}$$

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a$$

$$\mathrm{SU}(3): \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad \mathrm{tr}\left(T^aT^b\right) = \frac{\delta_{ab}}{2}, \quad [T^a, T^b] = if_{abc}T^c, \quad (T^a)^\dagger = T^a, \quad \mathrm{tr}[T^a] = 0$$

Gell-Mann行列　大野木さんノート参照　構造定数

フェルミオンラグランジアン

$$\mathcal{L}_f = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x)$$

ユークリッド化 (虚時間化)

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad \to \quad 1, 2, 3, 4$$

$$x_4 = ix^0 \quad \to \quad x^0 = -ix_4$$

Minkowski計量

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_E^2 = x_4^2 + \vec{x}^2 = -(x^0)^2 + \vec{x}^2 = -x_M^2$$

$$\int dx^0 = -i \int dx_4 \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial(-ix_4)} = i\frac{\partial}{\partial x_4} = i\partial_4$$

$$A_0 = iA_4$$

$$F_{0j} = \partial_0 A_j - \partial_j A_0 + ig[A_0, A_j] = i(\partial_4 A_j - \partial_j A_4 + ig[A_4, A_j]) = iF_{4j}$$

$$D_0 = \partial_0 + igA_0 = iD_4 = i(\partial_4 + igA_4)$$

$$\gamma_4 = \gamma_0, \quad \gamma_{j,E} = -i\gamma_M^j \quad (j = 1, 2, 3) \qquad \{\gamma_{\mu,E}, \gamma_{\nu,E}\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu,E}^\dagger = \gamma_{\mu,E}$$

$$(\gamma^\mu D_\mu)_M = i\gamma_4 D_4 + i\gamma_{j,E} D_{j,E} = i(\gamma_\mu D_\mu)_E$$

ユークリッド化 (虚時間化)

$$F_{0i} = iF_{4i}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -(F_{0j})^2 - (F_{j0})^2 + (F_{jk})^2 = (F_{4j})^2 + (F_{j4})^2 + (F_{jk})^2 = (F_{\mu\nu})^2_E$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}(x)\right)^2_E$$

$$\begin{aligned} iS_g &= i\int d^4x_M \left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x))\right) = i(-i)\int d^4x_E \left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(x))^2_E\right) \\ &= -\int d^4x_E \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(x))^2_E\right) = -\int d^4x_E \left(\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu}(x))^2_E\right) = -S_{g,E} \end{aligned}$$

連続ユークリッド座標　非可換ゲージ作用

$$\mathcal{L}_f = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = -\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)_E\psi(x)$$

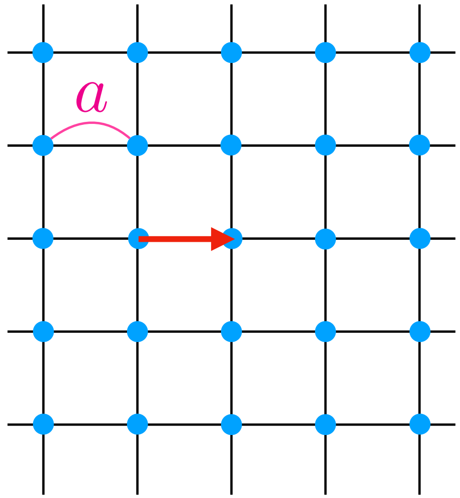
$$iS_f = i\int d^4x_M\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = -\int d^4x_E\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)_E\psi(x) = -S_{f,E}$$

連続ユークリッド座標　フェルミオン作用

以降ではユークリッド座標のみを扱うので添字$_E$は省略

離散格子化 (格子正則化)

格子間隔 a を使って時空を離散格子化



フェルミオン: 格子点

ゲージ場: 格子点をつなぐリンク

$\mathcal{O}(1/a)$ エネルギー運動量カットオフが自然に入る

$$x_\mu = n_\mu a$$

積分 → 和　$\int d^4x \;\to\; a^4 \sum_n$　区分求積法

微分 → 差分　$\partial_\mu f(x) \;\to\; \dfrac{f(x+\hat{\mu}) - f(x)}{a}$

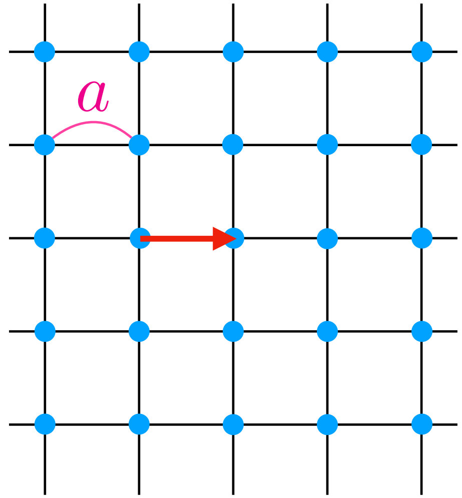
$\hat{\mu} = \hat{e}_\mu a$

μ 方向単位ベクトル

$$\partial_\mu^2 f(x) \;\to\; \frac{f(x+\hat{\mu}) + f(x-\hat{\mu}) - 2f(x)}{a^2}$$

μ の和取らない

格子作用決定指針



連続極限 $a \to 0$ で連続理論の作用を再現

連続理論の作用が持つ対称性をできるだけ反映

連続回転(連続並進)対称性はあきらめる

90°回転(格子間隔単位並進)対称性は反映

(格子上の)ゲージ対称性は必ず反映させる

あきらめた対称性も連続極限で回復する(と期待)

数値シミュレーションで確認可能

対称性から許されれば連続極限で消える項を足しても良い 山田さん講義

作用の改良: 有限格子間隔誤差を抑制するように連続極限で消える項を足す

今回は一番単純なゲージ作用(Wilsonゲージ作用)を紹介

ナイーブフェルミオン作用

格子U(1)ゲージ作用

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)] = 0$$

$$S_g^{\mathrm{cont}} = \int d^4x \left(\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}(x))^2 \right)$$

$$S_g = \sum_n \frac{1}{e^2} \sum_{\mu<\nu} \left(1 - \mathrm{Re}\left[P_{\mu\nu}(x)\right]\right)$$

Wilson line

ゲージリンクの導入
連続理論の話

ゲージ変換

$$\psi(x) \to V(x)\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)V^\dagger(x) \qquad A_\mu(x) \to V(x)A_\mu(x)V^\dagger(x) - \frac{i}{e}V(x)(\partial_\mu V^\dagger(x))$$

$$V(x) = e^{i\alpha(x)}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$ 無限小ゲージ変換

$$\overline{\psi}(x)\psi(x)$$ ゲージ不変

$$\overline{\psi}(x)\psi(y) \to \overline{\psi}(x)V^\dagger(x)V(y)\psi(y)$$ ゲージ不変ではない

Wilson line

$$U(x,y) = \mathrm{P}\exp\left(ie\int_x^y dz_\mu A_\mu(z)\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{l=1}^{N}\left(1 + ieA_\mu(w^{l-1})dw_\mu\right)$$

P: 経路順序積

$$dw = \frac{y-x}{N}, \quad w^l = x + l\,dw$$

ゲージ変換

$$U(x,y) \to V(x)U(x,y)V^\dagger(y)$$

$$\overline{\psi}(x)U(x,y)\psi(y)$$ ゲージ不変

ゲージリンク

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$ 無限小ゲージ変換

$$V(x) = e^{i\alpha(x)}$$

ゲージ変換確認　$U(x,y) \to V(x)U(x,y)V^\dagger(y)$

$$U(x,y) \to \mathrm{P}\exp\left(ie\int_x^y dz_\mu (A_\mu(z) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(z))\right) = e^{i(\alpha(x)-\alpha(y))}U(x,y) = V(x)U(x,y)V^\dagger(y)$$

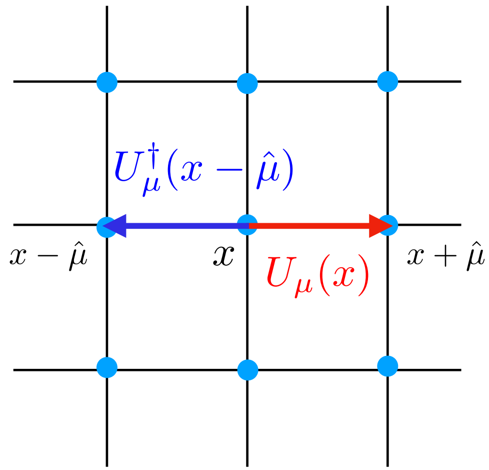
格子理論の話

$\hat{\mu} = \hat{e}_\mu a$

ゲージリンク ≈ 格子点をつなぐ最小のWilson line $U(x, x+\hat{\mu})$

格子ゲージ理論の基本変数　a: 格子間隔

$$U_\mu(x) = e^{iaeA_\mu(x)}, \quad U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})$$



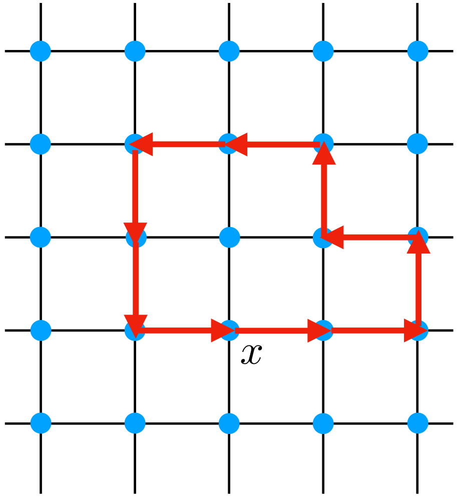
ゲージ変換

$$U_\mu(x) \to V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x+\hat{\mu})$$

プラケット

ゲージ変換 $U_\mu(x) \to V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x+\hat{\mu})$ $\quad U_\mu^\dagger(x) \to V(x+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x)V^\dagger(x)$

$$U_\mu(x)U_\nu(x+\mu) \quad \to \quad V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x+\mu)V(x+\mu)U_\nu(x+\mu)V^\dagger(x+\mu+\nu)$$
$$= V(x)U_\mu(x)U_\nu(x+\mu)V^\dagger(x+\mu+\nu)$$

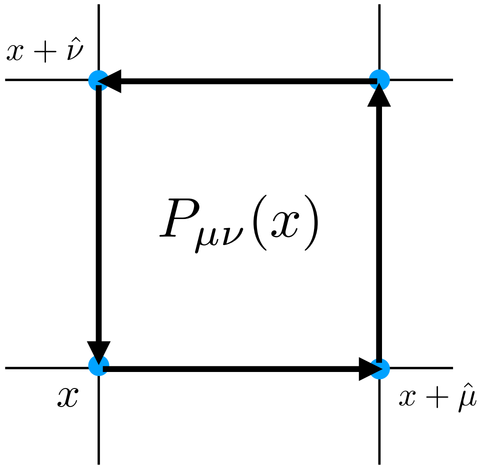


$U_\mu(x)$ で作られるループはゲージ不変

$$U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu}) \to V(x)U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})V^\dagger(x) = U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})$$

プラケット(plaquette) = 最小のループ

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x+\mu)U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$$



$$P_{\nu\mu}(x) = P_{\mu\nu}^\dagger(x)$$

プラケットで作られる作用

Wilsonゲージ作用
プラケットゲージ作用

と呼ばれる

Wilsonゲージ作用

$$\sum_{\mu<\nu}(1-\mathrm{Re}\,[P_{\mu\nu}(x)]) = \frac{1}{2}\sum_{\mu<\nu}(2-2\mathrm{Re}\,[P_{\mu\nu}(x)])$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu<\nu}\left(2-(P_{\mu\nu}(x)+P^\dagger_{\mu\nu}(x))\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu<\nu}(2-(P_{\mu\nu}(x)+P_{\nu\mu}(x)))$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}(1-P_{\mu\nu}(x))$$

$$S_g = \sum_n \frac{1}{e^2}\sum_{\mu<\nu}(1-\mathrm{Re}\,[P_{\mu\nu}(x)])$$

連続極限確認　$a\sim 0$で展開

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= e^{iaeA_\mu(x)}e^{iaeA_\nu(x+\hat\mu)}e^{-iaeA_\mu(x+\hat\nu)}e^{-iaeA_\nu(x)} \\ &= \exp\left(iae(A_\nu(x+\hat\mu)-A_\nu(x)-A_\mu(x+\hat\nu)+A_\mu(x))\right) \\ &\sim \exp\left(ia^2e(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)+\cdots)\right) \\ &\sim 1+ia^2e\,(F_{\mu\nu}(x)+\cdots)-\frac{a^4e^2}{2}\,(F_{\mu\nu}(x))^2+\cdots \end{aligned}$$

$$A_\nu(x+\hat\mu)-A_\nu(x) = a\partial_\mu A_\nu(x)+\cdots$$

$$F_{\nu\mu}(x) = -F_{\mu\nu}(x)$$

$$S_g = \sum_n \frac{1}{2e^2}\sum_{\mu<\nu}(2-[P_{\mu\nu}(x)+P_{\nu\mu}(x)]) \sim \sum_n \frac{1}{2e^2}\sum_{\mu<\nu}\left(2\frac{a^4e^2}{2}\,(F_{\mu\nu}(x))^2+\cdots\right)$$

$$a^4\sum_n \to \int d^4x$$

$$S_g \xrightarrow[a\to 0]{} \int d^4x\left(\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu}(F_{\mu\nu}(x))^2\right) = S_g^{\mathrm{cont}}$$

連続極限で連続理論の作用を再現

格子SU(3)ゲージ作用

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)] \neq 0$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$$

$$S_g = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(x))^2 \right) = \int d^4x \left(\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a(x))^2 \right)$$

$$S_g = \sum_n \beta \sum_{\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{3} \mathrm{tr}\left[\mathrm{Re}\left(P_{\mu\nu}(x) \right) \right] \right)$$

ゲージリンク

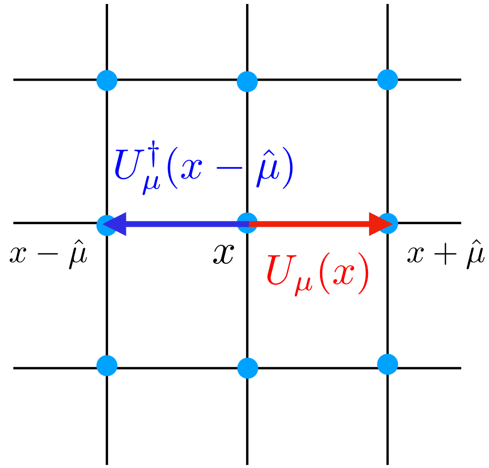
格子ゲージ理論の基本変数　a: 格子間隔

数値シミュレーションでは$A_\mu(x)$ではなく$U_\mu(x)$を使って計算

$$U_\mu(x) = e^{iagA_\mu(x)}, \quad U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})$$

この関係は 連続極限の確認 / 摂動計算 くらいでのみ使う

$U_\mu(x)$: SU(3)の元　3×3行列　$U_\mu^\dagger(x)U_\mu(x) = I, \quad \det U_\mu(x) = 1$



ゲージ変換　$V(x)$: SU(3)の元

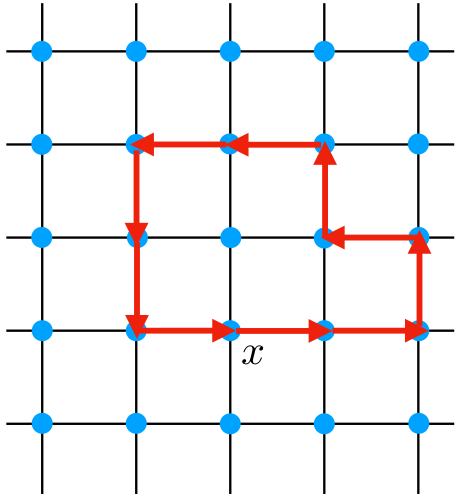
$$U_\mu(x) \to V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x+\hat{\mu})$$

$$U_\mu^\dagger(x) \to V(x+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x)V^\dagger(x)$$

プラケット

ゲージ変換 $U_\mu(x) \to V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x+\hat{\mu})$　　$U^\dagger_\mu(x) \to V(x+\hat{\mu})U^\dagger_\mu(x)V^\dagger(x)$

$U_\mu(x)$ のループだけではゲージ不変にはならない



$$U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu}) \to V(x)U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})V^\dagger(x) \neq U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})$$

$U_\mu,\ V$ は非可換

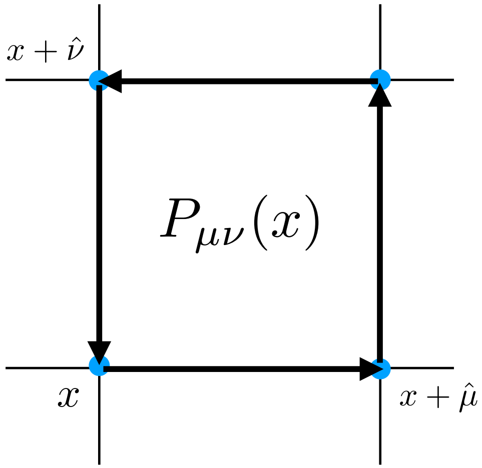
トレースを取ればループはゲージ不変

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})\right] \quad \to \quad & \mathrm{tr}\left[V(x)U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})V^\dagger(x)\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[V^\dagger(x)V(x)U_\mu(x)\cdots U_\mu(x-\hat{\mu})\right]\end{aligned}$$

プラケット

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x+\mu)U^\dagger_\mu(x+\hat{\nu})U^\dagger_\nu(x)$$

掛け算の順序は大事



$$P_{\nu\mu}(x) = P^\dagger_{\mu\nu}(x)$$

プラケットのトレースで作られる作用

Wilsonゲージ作用
プラケットゲージ作用
と呼ばれる

Wilsonゲージ作用

ベイカー・キャンベル・ハウスドルフ公式

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \cdots)$$

$$S_g = \sum_n \beta \sum_{\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\mathrm{Re}\left(P_{\mu\nu}(x)\right)\right]\right) \qquad \beta = \frac{6}{g^2}$$

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x)U_\nu(x+\mu)U_\mu^\dagger(x+\nu)U_\nu^\dagger(x) \\ &= e^{iagA_\mu(x)}e^{iagA_\nu(x+\mu)}e^{-iagA_\mu(x+\nu)}e^{-iagA_\nu(x)} \\ &\sim \exp\left\{ia^2g(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) - a^2g^2[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \cdots\right\} \\ &\sim 1 + ia^2g\left(F_{\mu\nu}(x) + \cdots\right) - \frac{a^4g^2}{2}\left(F_{\mu\nu}(x)\right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$A_\nu(x+\hat{\mu}) = A_\nu(x) + \mathcal{O}(a)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

$$S_g = \sum_n \frac{6}{2g^2} \sum_{\mu<\nu}\left(2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[P_{\mu\nu}(x) + P_{\nu\mu}(x)\right]\right) \sim \sum_n \frac{1}{g^2}\sum_{\mu<\nu}\left(2\frac{a^4g^2}{2}\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}(x)\right)^2 + \cdots\right)$$

$$\sum_{\mu<\nu}\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\mathrm{Re}\left(P_{\mu\nu}(x)\right)\right]\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mu<\nu}\left(2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[P_{\mu\nu}(x) + P_{\nu\mu}(x)\right]\right)$$

$$S_g \xrightarrow[a\to 0]{} \int d^4x \left(\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(x))^2\right) = S_g^{\mathrm{cont}}$$

連続極限で連続理論の作用を再現

連続極限の取り方

作用に現れるパラメータは a ではなく g

SU(N)ゲージ理論ベータ関数

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \cdots$$

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f\right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4}\left(\frac{34}{3}N^2 - \frac{10}{3}NN_f - \frac{N^2-1}{N}N_f\right)$$

μ: 理論のエネルギースケール

例えば $\mu = 1/a$ のとき $g(1/a)$

N_f: フレーバー数

QCD

$N = 3,\ \ N_f \leq 6$ では $\beta_0 > 0$

ベータ関数を解く

$$a(g) = \frac{1}{\Lambda_L}\left(\beta_0 g^2\right)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2}\right) + \cdots$$

Λ_L: エネルギースケール定数

連続極限を取るには

$$a \to 0 \quad \to \quad g \to 0$$

格子フェルミオン作用

$$S_f = a^4 \sum_n \left(\frac{1}{2a} \sum_\mu \big(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu}) - \overline{\psi}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\psi(x-\hat{\mu}) \big) + m\overline{\psi}(x)\psi(x) \right)$$

ナイーブフェルミオン作用

$$S_f^{\text{cont}} = \int d^4x\ \overline{\psi}(x)\left(\gamma_\mu D_\mu + m\right)\psi(x)$$

微分 $\rightarrow$ 差分　$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \dfrac{\psi(x+\hat{\mu}) - \psi(x-\hat{\mu})}{2a}$　中央差分

ゲージ不変でない　　　　ゲージ不変

$$\overline{\psi}(x)\psi(x+\hat{\mu}) \quad \rightarrow \quad \overline{\psi}(x)U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu})$$

ナイーブフェルミオン作用

$$\psi(x+\hat{\mu}) = \psi(x) + a\partial_\mu\psi(x) + \cdots$$

$$S_f = a^4 \sum_n \left(\frac{1}{2a} \sum_\mu \left(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu}) - \overline{\psi}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\psi(x-\hat{\mu}) \right) + m\overline{\psi}(x)\psi(x) \right) \xrightarrow[a\to 0]{} S_f^{\text{cont}}$$

S_f^{cont} の対称性を反映

カイラル対称性を持つ　$m = 0$ の時

$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \rightarrow \overline{\psi}(x)e^{i\theta\gamma_5}$ の変換で作用は不変

作用の運動量表示(準備)

連続理論　　　　　　　　　　格子理論(無限体積)

$$\widetilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx} \quad \rightarrow \quad \widetilde{f}(pa) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) e^{-ipan}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \widetilde{f}(p) e^{ipx} \quad \rightarrow \quad f(na) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dp}{2\pi} \widetilde{f}(p) e^{ipna} = \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d(pa)}{2\pi} \widetilde{f}(pa) e^{ipan}$$

連続運動量

デルタ関数　$$\delta(pa - qa) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-in(pa-qa)}$$

クロネッカーデルタ　$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d(pa)}{2\pi} e^{ipa(n-m)}$$

作用の運動量表示

自由(相互作用なし)ナイーブフェルミオン作用　$U_\mu(x) = 1$

$$S_f = a^4 \sum_n \left(\frac{1}{2a} \sum_\mu \left(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x+\hat{\mu}) - \overline{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x-\hat{\mu}) \right) + m\overline{\psi}(x)\psi(x) \right)$$

簡単のため1次元で考える

$$\begin{aligned} a\sum_n \overline{\psi}(x)\psi(x+\mu) &= a\sum_n \frac{1}{a^2} \int \frac{dqa}{2\pi} \tilde{\overline{\psi}}(qa) e^{iqna} \int \frac{dpa}{2\pi} \tilde{\psi}(pa) e^{ip(na+\hat{\mu}a)} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dqa}{2\pi} \int \frac{dpa}{2\pi} \tilde{\overline{\psi}}(qa) \tilde{\psi}(pa) e^{ip_\mu a} \left(\sum_n e^{in(qa+pa)} \right) \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dpa}{2\pi} \tilde{\overline{\psi}}(-pa) \tilde{\psi}(pa) e^{ip_\mu a} \end{aligned}$$

$$\sum_n e^{in(qa+pa)} = 2\pi\delta(qa+pa)$$

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{1}{a^4} \int \frac{d^4(pa)}{(2\pi)^4} \tilde{\overline{\psi}}(-pa) \left(\sum_\mu \gamma_\mu \frac{e^{ip_\mu a} - e^{-ip_\mu a}}{2a} + m \right) \tilde{\psi}(pa) \\ &= \frac{1}{a^4} \int \frac{d^4(pa)}{(2\pi)^4} \tilde{\overline{\psi}}(-pa) \left(\frac{i}{a} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + m \right) \tilde{\psi}(pa) \end{aligned}$$

$$D_f = \frac{i}{a} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + m$$

ダブリング問題

$$D_f = \frac{i}{a}\sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + m$$

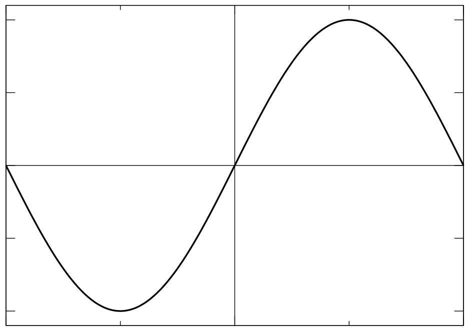
伝搬関数 D_f^{-1} の極は粒子を表す

$$(aD_f)^{-1} = \frac{1}{i\sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + ma} = \frac{-i\sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + ma}{\sum_\mu \sin^2(p_\mu a) + (ma)^2}$$

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu A_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{2} A_\mu A_\nu (\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = \sum_\mu A_\mu^2$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ 極 $\sum_\mu \sin^2(p_\mu a) + (ma)^2 = 0$



簡単のため $m = 0$ $\quad \sum_\mu \sin^2(p_\mu a) = 0$

極の位置

$p = (0,0,0,0),\ (\pi/a,0,0,0),\ (\pi/a,\pi/a,0,0),\cdots,\ (\pi/a,\pi/a,\pi/a,\pi/a)$

連続理論から
期待される極

$p = \mathcal{O}(1/a)$ に現れる極　ダブラーと呼ばれる

ダブリング問題

1つの伝搬関数に2^4=16個の粒子が現れてしまう

ダブリング問題解決方法

→ 菊川さんの講義

有名な方法2例

Wilsonフェルミオン作用

カイラル対称性を破る

フレーバー対称性を持つ

ダブラーを重くして区別

理論は簡潔、そこそこの計算時間必要

スタッガードフェルミオン作用

Kogut-Susskindフェルミオン作用

カイラル対称性の一部を持つ

フレーバー対称性を破る

ダブラーを物理的粒子として扱う

４フレーバー単位の理論

理論は複雑、計算時間最小

格子QCDシミュレーションの雰囲気説明

無次元化　$x_\mu \to x_\mu/a = n_\mu, \quad m \to ma$

有限体積　$N_X^3 \times N_T = (L/a)^3 \times (T/a)$

2+1フレーバーシミュレーションパラメータ

$$g, \quad m_l a (= m_u a = m_d a), \quad m_s a, \quad N_X, N_T$$

ハドロン物理量から決定　$m_\Xi, \quad m_\pi, \quad m_K$ を選んだ場合

$$\frac{m_\pi^{\rm lat} a}{m_\Xi^{\rm lat} a} = \frac{m_\pi^{\rm exp}}{m_\Xi^{\rm exp}}, \quad \frac{m_K^{\rm lat} a}{m_\Xi^{\rm lat} a} = \frac{m_K^{\rm exp}}{m_\Xi^{\rm exp}} \quad + \quad a^{-1}({\rm GeV}) = \frac{m_\Xi^{\rm exp}({\rm GeV})}{m_\Xi^{\rm lat} a}$$ @ $g(a)$ 固定

十分大きな物理的体積　$L m_\pi^{\rm lat} > 4$ できれば $L m_\pi^{\rm lat} > 6$

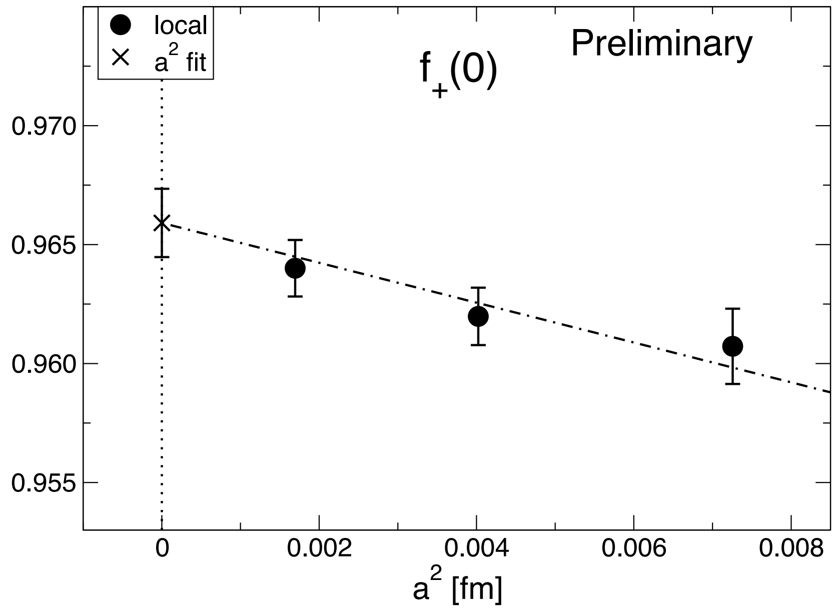
インプット以外の物理量は予言値　格子間隔 a

$$m_H^{\rm lat}(a) a \times a^{-1} = m_H^{\rm lat}(a)({\rm GeV})$$

格子QCDシミュレーションの雰囲気説明

連続極限

$g(a)$ を変えて計算を繰り返す $\to$ 複数の格子間隔の結果を使って $a \to 0$ 外挿



北原さん講演

$K \to \pi \ell \nu$ 崩壊

$|V_{us}|$ 決定に重要な $f_+(0)$